ПРИМЕРНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ПОСТУПЛЕНИЯ В КЛАСС ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОФИЛЯ

Задание № 1. (3 балла).

Решите уравнение $x^3 + 3x^2 = 4x + 12.$

Задание №2. (6 баллов).

Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 76 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость теплохода в неподвижной воде, если скорость течения равна 3 км/ч, стоянка длится 1 час, а в пункт отправления теплоход возвращается через 20 часов после отплытия из него.

Задание № 3. (8 баллов).

Постройте график функции $y = |x^2 + 2x - 3|.$ Какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс?

Задание № 4. (4 балла).

Отрезки AB и DC лежат на параллельных прямых, а отрезки AC и BD пересекаются в точке M. Найдите MC, если $AB = 16$, $DC = 24$, $AC = 25$.

Задание № 5. (5 баллов).

В параллелограмме $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке K. Докажите, что площадь параллелограмма $ABCD$ в четыре раза больше площади треугольника CKD.

Задание № 6. (8 баллов).

Вершины ромба расположены на сторонах параллелограмма, а стороны ромба параллельны диагоналям параллелограмма. Найдите отношение площадей ромба и параллелограмма, если отношение диагоналей параллелограмма равно 28.

Решение заданий.

Задание № 1. (3 балла).

Решите уравнение $x^3 + 3x^2 = 4x + 12.$

Решение.

Преобразуем уравнение:

$$x^3 + 3x^2 = 4x + 12 \Leftrightarrow x^2(x+3) - 4(x+3) = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x^2-4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+3)(x-2)(x+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3, \\ x=-2, \\ x=2. \end{array}\right.$$

Ответ: −3; −2; 2.

Задание № 2. (6 баллов).

Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 76 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость теплохода в неподвижной воде, если скорость течения равна 3 км/ч, стоянка длится 1 час, а в пункт отправления теплоход возвращается через 20 часов после отплытия из него.

Решение.

Пусть скорость теплохода равна v км/ч, $v > 3$.

Составим уравнение:

$$\frac{76}{v-3}+\frac{76}{v+3}=19 \underset{v>3}{\Leftrightarrow} 4v+12+4v-12=v^2-9 \Leftrightarrow v^2-8v-9=0,$$

откуда $v = 9$.

Ответ: 9 км/ч.

Задание № 3. (8 баллов).

Постройте график функции $y=|x^2+2x-3|$. Какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс?

Решение (краткое)

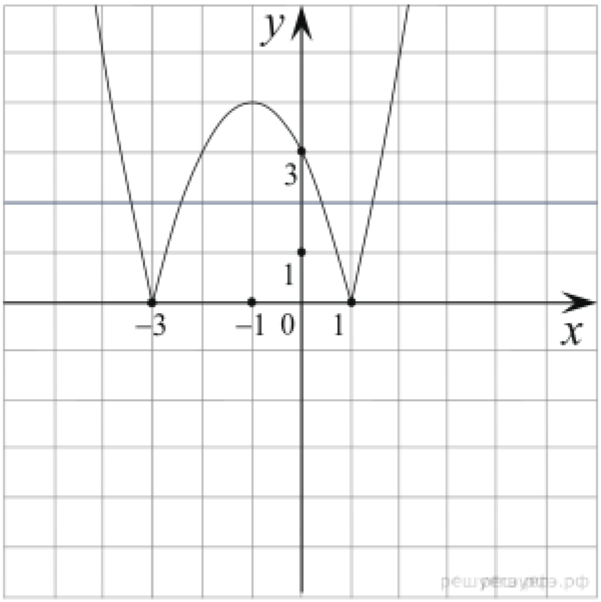


График данной функции — это график параболы $y = x^2 + 2x - 3$, отрицательная часть которого отражена относительно оси Ox. Этот график изображён на рисунке.

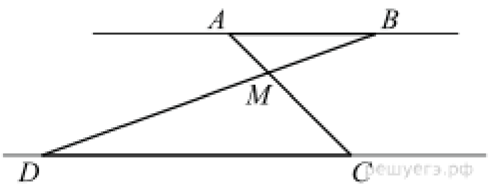
Прямая, параллельная оси абсцисс, задаётся формулой $y = c$, где c — постоянная. Из графика видно, что прямая $y = c$ может иметь с графиком функции не более четырёх общих точек.

Ответ: 4.

Задание № 4. (4 балла).

Отрезки AB и DC лежат на параллельных прямых, а отрезки AC и BD пересекаются в точке M. Найдите MC, если $AB = 16$, $DC = 24$, $AC = 25$.

Решение.



Углы DCM и BAM равны как накрест лежащие, углы DMC и BMA равны как вертикальные, следовательно, треугольники DMC и BMA подобны по двум углам.

Значит, $\frac{AM}{MC} = \frac{AB}{CD} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}.$ Следовательно,

$$AC = AM + MC = \frac{2}{3}MC + MC = \frac{5}{3}MC.$$

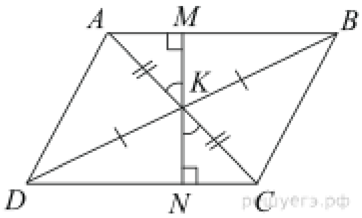
Откуда $MC = \frac{3}{5}AC = 15.$

Ответ: 15.

Задание № 5. (5 баллов).

В параллелограмме *ABCD* диагонали *AC* и *BD* пересекаются в точке *K*. Докажите, что площадь параллелограмма *ABCD* в четыре раза больше площади треугольника *CKD*.

Решение.



Проведём высоту MN так, чтобы она проходила через точку K. Углы AKM и NKC равны друг другу как вертикальные. Вспомним также, что диагонали делятся точкой пересечения пополам, следовательно, $AK = KC$. Рассмотрим треугольники AMK и KCN, они прямоугольные, имеют равные углы и равные гипотенузы, следовательно, эти треугольники равны, а значит равны отрезки MK и KN. Таким образом, $MK = KN = \frac{1}{2}MN.$

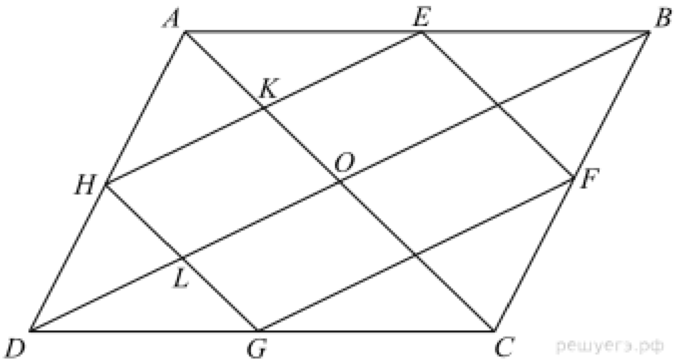
Площадь параллелограмм равна $S_{ABCD} = CD \cdot MN,$ а площадь треугольника CKD:

$$S_{CKD} = \frac{1}{2}CD \cdot KN = \frac{1}{2}CD \cdot \frac{1}{2}MN = \frac{S_{ABCD}}{4}.$$

Задание № 6. (8 баллов).

Вершины ромба расположены на сторонах параллелограмма, а стороны ромба параллельны диагоналям параллелограмма. Найдите отношение площадей ромба и параллелограмма, если отношение диагоналей параллелограмма равно 28.

Решение.



Введём обозначения, как показано на рисунке. Поскольку $HG \parallel AC$ и $HE \parallel BD,$ получаем, что *HKOL* — параллелограмм, следовательно, углы *KHL* и *KOL* равны. Рассмотрим треугольники *ABC* и *EBF*, угол *EBF* — общий, углы *BEF* и *BAC* равны как соответственные при параллельных прямых, углы *BFE* и *BCA* — аналогично, следовательно, треугольники *ABC* и *BEF* подобны по двум углам. Откуда $\frac{EF}{AC} = \frac{BE}{AB}$ Аналогично подобны треугольники *ABD* и *AEH*, откуда $\frac{HE}{BD} = \frac{AE}{AB}.$ Пусть сторона ромба равна a, а длина короткой диагонали равна d. Сложим два полученных уравнения:

$$\frac{EF}{AC} + \frac{HE}{BD} = \frac{AE}{AB} + \frac{BE}{AB} \Leftrightarrow \frac{a}{d} + \frac{a}{28d} = \frac{AE+EB}{AB} \Leftrightarrow .$$

$$\Leftrightarrow \frac{28a+a}{28d} = \frac{AB}{AB} \Leftrightarrow 28d = 29a \Leftrightarrow a = \frac{28d}{29}.$$

Площадь ромба можно найти как произведение сторон на синус угла между ними: $S_{HEFG} = a^2 \sin\angle KHL.$ Площадь параллелограмма можно найти как половину произведения диагоналей на синус угла между ними: $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \cdot \sin\angle KOL = \frac{1}{2} \cdot d \cdot 28d \cdot \sin\angle KOL.$ Найдём отношение площадей ромба и параллелограмма:

$$\frac{S_{HEFG}}{S_{ABCD}} = \frac{a^2 \sin\angle KHL}{\frac{1}{2} \cdot d \cdot 28d \cdot \sin\angle KOL} = \frac{a^2}{14d^2} = \frac{d^2 \frac{28^2}{29^2}}{14d^2} = \frac{56}{841}.$$

Ответ: $\frac{56}{841}.$