

Школьный этап Всероссийской олимпиады по математике

Решения задач

октябрь 2020

В 4 и 5 классах олимпиада длилась 60 минут, в 6–8 классах — 90 минут, в 9–11 классах — 120 минут.

Для каждого номера задания составители подготовили несколько версий задач. Под каждым номером участнику случайным образом выдавалась одна из версий. Таким образом, у каждого школьника был свой вариант олимпиады. Далее для каждого номера приведена только одна версия задачи с решением.

Содержание

4 класс	2
4.1 4.2 4.3 4.4 4.5 4.6 4.7 4.8	
5 класс	8
5.1 5.2 5.3 5.4 5.5 5.6 5.7 5.8	
6 класс	13
6.1 6.2 6.3 6.4 6.5 6.6 6.7 6.8	
7 класс	20
7.1 7.2 7.3 7.4 7.5 7.6 7.7 7.8	
8 класс	28
8.1 8.2 8.3 8.4 8.5 8.6 8.7 8.8	
9 класс	34
9.1 9.2 9.3 9.4 9.5 9.6 9.7 9.8	
10 класс	40
10.1 10.2 10.3 10.4 10.5 10.6 10.7 10.8	
11 класс	46
11.1 11.2 11.3 11.4 11.5 11.6 11.7 11.8	

4 класс

Задача 4.1. Аня загадала трёхзначное число, Вера — четырёхзначное число, а Света — пятизначное число. Они выписали свои числа в некотором порядке и получили следующее выражение:

410790500843.

Какое число загадала Света?

Ответ: 90500.

Решение. Ни одно из чисел девочек не начинается с цифры 0. Поскольку данное выражение заканчивается на 00843, то его конец, являющийся трёхзначным, четырёхзначным или пятизначным числом одной из девочек, может быть только трёхзначным, равным 843 (число Ани).

Тогда 410790500 — это комбинация четырёхзначного или пятизначного числа, выписанных в некотором порядке. По аналогичной причине конец не может быть четырёхзначным числом, поэтому он может быть только пятизначным, равным 90500 (число Светы, которое и требовалось найти). А 4107 — число Веры. □

Задача 4.2. На рисунке ниже изображён план замка: белые квадратики — открытые для посещения комнаты, чёрные квадратики — закрытые для посещения комнаты. Между любыми двумя соседними комнатами есть дверь.

Турист начал обход в комнате В3. Он обошёл несколько комнат, открытых для посещения, побывав в каждой не более одного раза.

Оказалось, что турист не зашёл ровно в одну комнату, открытую для посещения. В какую?

	1	2	3	4	5	6
A						
B			•			
C						
D						
E						
F						

Ответ: D5.

Решение. Маршрут туриста — это несамопересекающаяся «змейка», проходящая по всем белым клеткам, кроме одной.

Разберём несколько случаев маршрута туриста в зависимости от его первого хода.

Случай 1. Предположим, первым ходом турист пошёл наверх, в А3. Тогда затем он идёт в А2, А1, В1, С1. Далее он может пойти вниз или направо.

Случай 1а. Пусть из С1 он пошёл вниз, в D1. Тогда дальше он идёт в Е1, F1, F2, F3. Если он дальше не пойдёт наверх, то если он дальше снова не пойдёт наверх, то уже будет минимум 2 непосещённые комнаты Е3 и Е4, а если пойдёт наверх, то будут минимум 2 непосещённые комнаты F5 и F6. Значит, из F3 турист идёт в Е3, Е4, F4, F5, F6, Е6, D6. Если дальше он пойдёт налево в D5, то затем пойдёт в С5, но тогда далее он пойдёт вверх, вправо или влево, и в каждом из этих случаев непосещённых комнат будет более 1 (учитывая, что ему нельзя возвращаться в комнаты, где он уже был). Значит, из D6 он идёт в С6. Легко понять, что дальше он должен идти в В6, А6, А5, В5, С5, С4, С3, С2. Единственная непосещённая комната — D5 (рис. 1).

Случай 1б. Пусть из С1 он пошёл вправо, в С2. Тогда дальше он идёт в С3, С4, С5. Несложно понять, что дальше он должен идти в В5, А5, А6, В6, С6, D6, Е6, F6, F5, F4, Е4, Е3, F3, F2, F1, Е1, D1. Единственная непосещённая комната — снова D5.

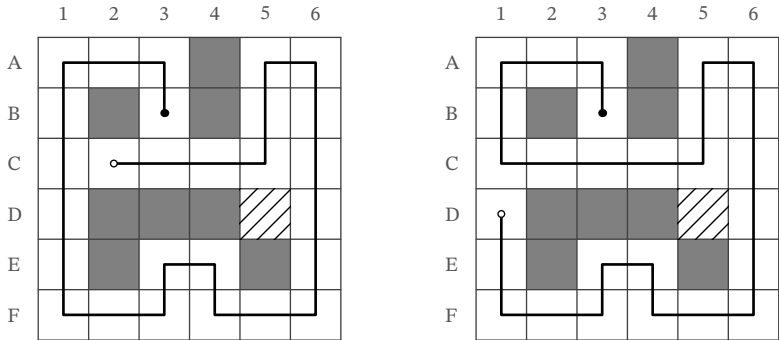


Рис. 1: к решению задачи 4.2

Случай 2. Предположим, первым ходом турист пошёл вниз, в С3. Далее он может пойти налево или направо.

Случай 2а. Пусть из С3 он пошёл налево, в С2, а затем в С1. Куда бы он далее ни пошёл, вверх или вниз, в обоих случаях найдутся минимум 2 непосещённые комнаты. Такой случай невозможен.

Случай 2б. Пусть из С3 он пошёл направо, в С4, а затем в С5. Несложно понять, что дальше он должен идти в В5, А5, А6, В6, С6, D6, Е6, F6, F5, F4, Е4, Е3, F3, F2, F1, Е1, D1, С1 (пропустив комнату D5). Но все оставшиеся комнаты С2, В1, А1, А2 он посетить уже не сможет. Такой случай невозможен.

Итак, единственная возможная непосещённая комната — D5. □

Задача 4.3. На острове племени Мумбо-Юмбо 7 кокосов стоят столько же, сколько 4 ба-

нана, а 2 банана на 8 монет дороже, чем 3 кокоса. Сколько монет стоит банан?

Ответ: 28.

Решение. Поскольку 7 кокосов равноценны 4 бананам, то 21 кокос равноценен 12 бананам.

Поскольку 2 банана равноценны 3 кокосам и 8 монетам, то 14 бананов равноценны 21 кокосу и 56 монетам, что, в свою очередь, равноценно 12 бананам и 56 монетам.

Итак, 14 бананов равноценны 12 бананам и 56 монетам. Тогда 2 банана стоят 56 монет, а 1 банан стоит 28 монет. □

Задача 4.4. Четверо гномов — Альберт, Брок, Вренн и Глоин — спорили, у кого больше золота. Каждый из них сказал по одной фразе:

- Альберт: «У меня не больше всех и не меньше всех золота.»
- Брок: «У меня не меньше всех золота.»
- Вренн: «У меня больше всех золота.»
- Глоин: «У меня меньше всех золота.»

Известно, что у любых двух гномов разное количество золота, и ровно один из четырёх гномов соврал. У кого из гномов больше всех золота? У кого из гномов меньше всех золота?

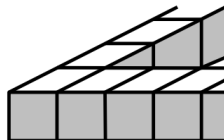
Ответ: Больше всех — у Брока, меньше всех — у Глоина.

Решение. Предположил, что Глоин соврал, и у него не меньше всех золота. Тогда все остальные гномы должны говорить правду, но по их высказываниям ни у кого из них не может быть меньше всех золота. Противоречие. Значит, Глоин сказал правду, и у него меньше всех золота. Тогда Брок точно сказал правду, а соврал либо Альберт, либо Вренн.

Предположим, Альберт соврал. Тогда у него должно быть больше всех золота. Но тогда бы соврал и Вренн. Противоречие. Значит, Альберт сказал правду (и у него не может быть больше всех золота), поэтому соврал Вренн (и у него не больше всех золота). Методом исключения получаем, что больше всех золота у Брока.

Несложно проверить, что когда у Брока больше всех золота, а у Глоина меньше всех золота, все условия задачи выполняются. □

Задача 4.5. Из 44 кубиков Лёва сложил квадратную рамку (часть рамки изображена на рисунке). Сколько ещё кубиков понадобится Лёве, чтобы полностью заполнить в один слой внутреннюю часть рамки?



Ответ: 100.

Решение. Каждую рамку можно разбить на 4 части, состоящие из одинакового количества подряд идущих кубиков (угловой кубик + все последующие по часовой стрелке до следующего углового кубика, как на рис. 2). И количество кубиков в каждой такой части на 1 меньше количества кубиков на стороне всей квадратной рамки. Значит, сторона квадратной рамки составляет $44 : 4 + 1 = 12$ кубиков. Тогда, чтобы заполнить внутреннюю часть рамки, Лёве потребуется $12 \cdot 12 - 44 = 100$ кубиков. $\square$

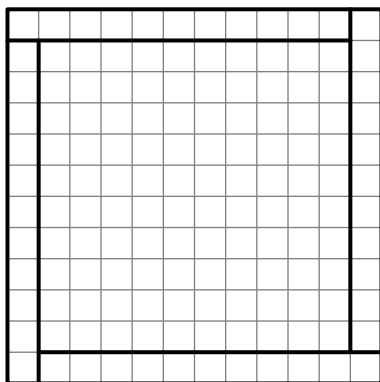
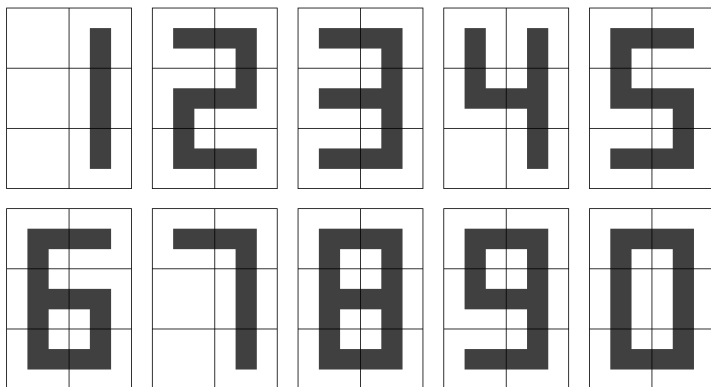
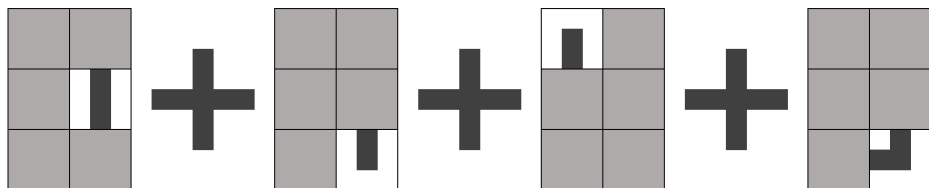


Рис. 2: к решению задачи 4.5

Задача 4.6. На инженерном калькуляторе цифры отображаются так, как показано на рисунке ниже.



Лёня на калькуляторе сложил четыре *различных* однозначных числа. Но у калькулятора сломался экран, поэтому пример выглядел так, как показано на следующем рисунке. Какая максимальная сумма могла получиться?



Ответ: 21.

Решение. Легко видеть, что первыми тремя непонятными цифрами не могут быть 2, 3, 5, 6, 8, 9. Тогда, поскольку три эти цифры различны, их сумма не превосходит $7 + 4 + 1$. Последняя цифра не превосходит 9, поэтому общая сумма не превосходит $9 + 7 + 4 + 1 = 21$.

При этом значение 21 возможно, например, если Лёва находил сумму в примере $1 + 7 + 4 + 9$. □

Задача 4.7. Если закопать 1 золотую монету на Поле Чудес, то на следующий день можно либо выкопать 8 золотых монет, либо не найти ничего.

У Буратино была 1 золотая монета. В течение 100 дней он каждый день закапывал по одной монете на Поле Чудес. В конце у него оказалось ровно 5 золотых монет. Сколько раз Буратино выкапывал 8 золотых монет?

Ответ: 13.

Решение. На каждый следующий день у Буратино количество монет либо увеличивается на 7, либо уменьшается на 1. Суммарно за 100 дней количество его монет увеличилось на 4.

Предположим, что увеличений на 7 было хотя бы 14, тогда уменьшений на 1 было не больше 86 (поскольку всего было 100 дней). Тогда количество его монет увеличилось хотя бы на $14 \cdot 7 - 86 = 12 > 4$. Значит, такой случай невозможен.

Предположим, увеличений на 7 было не более 12, тогда уменьшений на 1 было хотя бы 88 (поскольку всего было 100 дней). Тогда количество его монет уменьшилось хотя бы на $88 - 12 \cdot 7 = 4$, но оно должно было увеличиться. Значит, этот случай также невозможен.

Получается, что увеличений на 7 было ровно 13, а уменьшений на 1 было ровно 87. Легко проверить, что такой вариант удовлетворяет условию, так как $13 \cdot 7 - 87 = 4$. Значит, Буратино 13 раз выкапывал 8 золотых монет. $\square$

Задача 4.8. На доске написано 20 различных чисел. Полина к некоторым числам прибавила 1, к некоторым — 12, а ко всем оставшимся — 123. Среди новых 20 чисел могли появиться одинаковые. Какое наименьшее количество различных чисел могло быть среди новых чисел?

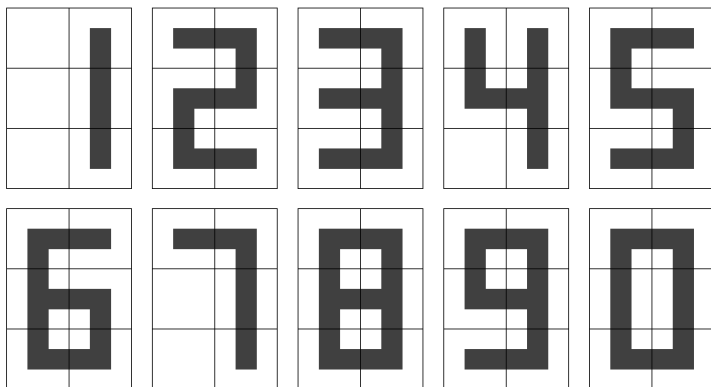
Ответ: 7.

Решение. Докажем, что после данных прибавлений количество различных чисел не менее 7. Предположим, после прибавлений какое-то число встречается хотя бы 4 раза, т. е. к 4 различным числам прибавляли либо 1, либо 12, либо 123, и получилось одно и то же значение. Хотя бы к двум из этих четырёх различных чисел обязательно прибавлялось одно и то же число (вариантов «что прибавить» всего три), но тогда они обязаны были по-прежнему остаться различными. Противоречие. Значит, после прибавлений любое число встречается не более 3 раз. Поскольку чисел осталось 20, и каждое значение среди них встречается не более 3 раз, то количество различных чисел там не меньше 7 (иначе, если бы их было не больше 6, то общее количество чисел не превосходило бы $3 \cdot 6 = 18 < 20$).

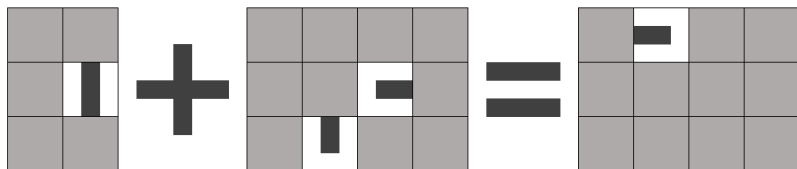
Приведём пример того, как могло получиться ровно 7 новых чисел. Рассмотрим 7 следующих групп, в которых в совокупности 20 различных чисел: (1, 112, 123), (2, 113, 124), (3, 114, 125), (4, 115, 126), (5, 116, 127), (6, 117, 128), (7, 118). Пусть Полина в каждой группе прибавила 123 к первому числу, 12 ко второму, 1 к третьему (кроме последней группы, где его нет). Тогда после прибавлений получатся числа (124, 124, 124), (125, 125, 125), (126, 126, 126), (127, 127, 127), (128, 128, 128), (129, 129, 129), (130, 130). Среди этих 20 чисел ровно 7 различных. $\square$

5 класс

Задача 5.1. На инженерном калькуляторе цифры отображаются так, как показано на рисунке ниже.



Лёня на калькуляторе прибавил к однозначному числу двухзначное число и получил двухзначное число. Но у калькулятора сломался экран, поэтому пример выглядел так, как показано на следующем рисунке. Восстановите пример.



Ответ: $7 + 43 = 50$.

Решение. Ясно, что двухзначное число перед знаком равенства начинается либо с 1, либо с 4, либо с 7. А двухзначное число после знака равенства начинается либо с 5, либо с 6, и оно больше предыдущего не более чем на 9. Значит, эти двухзначные числа начинаются с 4 и 5 соответственно. Тогда цифры единиц у слагаемых в левой части должны в сумме давать хотя бы 10, чтобы произошёл переход через разряд. Цифра единиц второго слагаемого определяется однозначно — это 3. Тогда первое слагаемое — цифра, не меньшая 7. Легко убедиться, что это может быть только 7. Тогда весь пример выглядит так: $7 + 43 = 50$. □

Задача 5.2. Высота красного кубика составляет 2 см, высота синего кубика — 3 см, высота зелёного кубика — 4 см. Петя построил из 8 кубиков башенку высоты 23 см. Какое наибольшее количество зелёных кубиков могло быть использовано при строительстве башенки?

Ответ: 3.

Решение. Предположим, зелёных кубиков было хотя бы 4. Выберем 4 зелёных кубика

в башенке, тогда их суммарная высота равна 16 см. При этом 4 оставшихся кубика имеют высоту не менее 2 см каждый. Тогда высота башенки не менее $16 + 4 \cdot 2 = 24 > 23$ см, противоречие. Значит, зелёных кубиков не больше 3.

Приведём пример возможной башенки, в которой 3 зелёных кубика. Пусть 3 нижних кубика — зелёные, 4 следующих — красные, а 1 верхний — синий. Тогда всего кубиков 8, а высота башенки равна $3 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 23$ см. $\square$

Задача 5.3. У Коцея Бессмертного есть три сундука с драгоценными камнями, на каждом сундуке есть надпись.

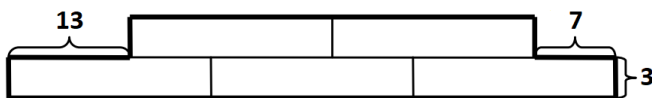


Все надписи на сундуках верны. Сколько драгоценных камней лежит во втором сундуке?

Ответ: 62.

Решение. Мысленно положим в третий сундук 13 драгоценных камней. Тогда во втором сундуке драгоценных камней станет столько же, сколько в первом и третьем суммарно, т. е. половина от общего количества камней, которая равна $(111 + 13) : 2 = 62$. $\square$

Задача 5.4. Женя сложил из пяти одинаковых прямоугольников фигуру и измерил длины трёх отрезков (см. рисунок). Чему равен периметр фигуры?



Ответ: 132.

Решение. Периметр данной фигуры — это сумма длин вертикальных и горизонтальных линий на её границе.

Сумма вертикальных линий считается легко: это $3 + 3 + 3 + 3 = 12$.

Из рисунка видно, что сумма $13 + 7$ — это то, на сколько три горизонтальных стороны прямоугольника длиннее двух таких сторон. Значит, одна горизонтальная сторона равна 20. Тогда сумма горизонтальных сторон равна $20 + 20 + 20 + 20 + 20 + (13 + 7) = 120$. Получаем, что общий периметр фигуры равен $120 + 12 = 132$. $\square$

Задача 5.5. Какое наибольшее натуральное число подходит под все три условия?

- Если оно делится на 3, то оно лежит между 50 и 59 включительно.
- Если оно не делится на 4, то оно лежит между 60 и 69 включительно.
- Если оно не делится на 6, то оно лежит между 70 и 79 включительно.

Ответ: 76.

Решение. Предположим, что искомое число больше 79. Тогда оно не должно удовлетворять ни одному из трёх предположений в условиях, т. е. оно должно не делиться на 3, делиться на 4 и делиться на 6. Получили противоречие с тем, что делящееся на 6 число не делится на 3.

Теперь будем перебирать оставшиеся возможные числа по убыванию. Числа 79, 78, 77 не подходят под второе условие: они не делятся на 4, но не лежат между 60 и 69 включительно.

А вот число 76 является искомым, так как подходит под все три условия — оно не делится на 3 и делится на 4, поэтому условия «между 50 и 59» и «между 60 и 69» могут не выполняться; а третье условие при этом выполнено. $\square$

Задача 5.6. На острове лилипутов имеются в обращении только монеты в 6 и 12 тугриков.

Если Гулливер возьмёт все свои монеты номиналом 6 тугриков, то ему не хватит 90 тугриков, чтобы купить 6 овец.

Если Гулливер возьмёт все свои монеты номиналом 12 тугриков, то ему не хватит 90 тугриков, чтобы купить 7 овец.

Если Гулливер возьмёт все свои монеты, то ему не хватит 90 тугриков, чтобы купить 8 овец.

Сколько тугриков стоит одна овца? (Все овцы стоят одинаково.)

Ответ: 18.

Решение. Если Гулливер возьмёт все свои монеты номиналом 6 тугриков и все свои монеты номиналом 12 тугриков, то ему не хватит $90 + 90 = 180$ тугриков для покупки $6 + 7 = 13$ овец. С другой стороны, если взять эту же сумму, не хватит 90 тугриков для покупки 8 овец. Значит, 13 овец стоят дороже 8 овец на 90 тугриков, поэтому 5 овец стоят 90 тугриков, а одна — $90 : 5 = 18$ тугриков. $\square$

Задача 5.7. Четверо друзей: Андрей, Борис, Вячеслав и Геннадий работают архитектором, баристой, ветеринаром и гитаристом. Андрей выше архитектора на 3 сантиметра, Борис выше баристы на 5 сантиметров, Вячеслав выше ветеринара на 8 сантиметров. Кто выше: Геннадий или гитарист? И на сколько сантиметров?

Ответ: Гитарист выше Геннадия на 16 см.

Решение. Сложим разницы в росте из условия: Андрей, Борис, Вячеслав суммарно выше архитектора, баристы, ветеринара на $3 + 5 + 8 = 16$ сантиметров. Но суммарный рост Андрея, Бориса, Вячеслава, Геннадия равен суммарному росту архитектора, баристы, ветеринара, гитариста, поскольку это один и тот же набор людей. Значит, добавившийся Геннадий ниже добавившегося гитариста на 16 сантиметров. $\square$

Задача 5.8. По кругу лежат 35 шариков, каждый из которых покрашен в какой-то цвет. Известно, что среди любых 6 подряд идущих шариков встречаются шарики не более чем трёх различных цветов. В какое наибольшее количество цветов могут быть покрашены шарики?

Ответ: 14.

Решение. Рассмотрим все различные цвета, которые встречаются у шариков. Докажем, что их не больше 14.

Назовём цвет *редким*, если шариков любого другого цвета не меньше, чем шариков данного цвета. Если шариков редкого цвета хотя бы три, то и шариков каждого цвета хотя бы по три. Тогда всего цветов не более 11 (иначе, если их хотя бы 12, шариков не меньше $12 \cdot 3 > 35$). Пусть теперь шариков редкого цвета один или два, выберем любой из них. Тогда следующие 5 последовательных шариков либо по часовой, либо против часовой стрелки не содержат шариков редкого цвета. Но тогда среди этих 5 шариков по условию встречается не более двух различных цветов. Эту пятёрку шариков назовём *стартовой* (а про редкий цвет далее забудем).

Разобьём все шарики на пятёрки последовательных, начиная со стартовой. Получим семь пятёрок. В стартовой пятёрке не более двух различных цветов.

Рассмотрим следующую за стартовой пятёрку. Она в совокупности с последним шариком стартовой пятёрки образует шестёрку шариков, в которой не более трёх различных цветов. Поэтому в этой пятёрке шариков есть не более двух новых цветов, которых не было в стартовой пятёрке.

Дальше перейдём к следующей пятёрке. Она в совокупности с последним шариком предыдущей пятёрки образует шестёрку шариков, в которой не более трёх различных цветов. Поэтому в этой пятёрке шариков есть не более двух новых цветов, которых пока ещё не было в предыдущих пятёрках. Повторяя это рассуждение и дальше, получим, что в каждой следующей пятёрке появляется не более двух новых цветов, т. е. всего цветов не более $7 \cdot 2 = 14$.

Приведём теперь пример расстановки шариков, в котором встречаются ровно 14 цветов. Обозначим цвета числами 1, 2, 3, ..., 14. Расположим их по кругу чередующимися группами по 3 и 2 одноцветных шарика, как изображено на рис. 3. Легко проверить, что условие задачи для такой расстановки шариков выполнено. $\square$

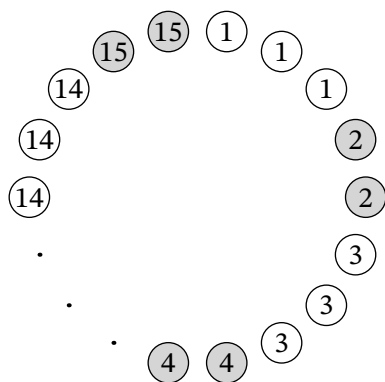
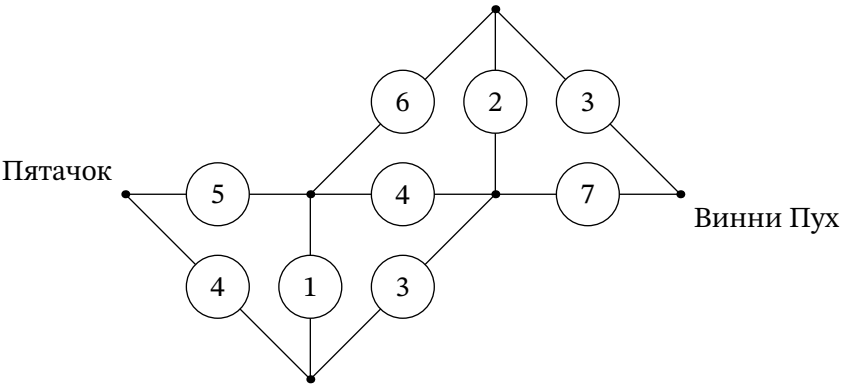


Рис. 3: к решению задачи 5.8

6 класс

Задача 6.1. На рисунке ниже изображена схема дорог между домом Пятачка и домом Винни-Пуха. На схеме указана стоимость проезда в рублях между каждой парой соседних остановок. Какое наименьшее количество рублей понадобится Пятачку, чтобы приехать в гости к Винни-Пуху?



Ответ: 12.

Решение. Назовём 4 остановки на горизонтальной линии слева направо A, B, C, D соответственно, остановку ниже B назовём B_1 , остановку выше C назовём C_1 , как на рис. 4. Все остановки будем считать точками. Ясно также, что в маршруте Пятачка не должны повторяться остановки, чтобы общая стоимость поездки была наименьшей.

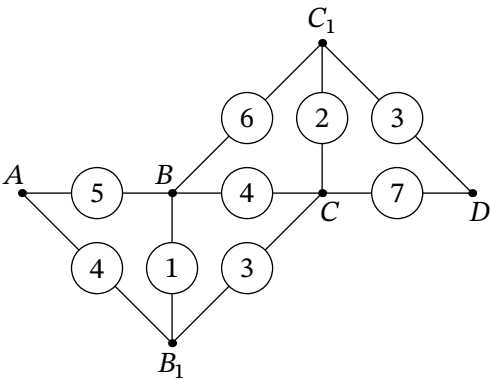


Рис. 4: к решению задачи 6.1

Докажем, что Пятачку потребуется не меньше 12 рублей. Для этого рассмотрим два случая того, каким может быть его последний проезд: либо из C в D , либо из C_1 в D .

Случай 1. Пусть Пятачок в D приедет из C , заплатив 7 рублей. Чтобы доехать из A до C ,

надо больше 5 рублей. Действительно, если из A ехать в B , то сразу тратится 5 рублей, а если из A ехать в B_1 , то сразу тратится 4 рубля, да ещё больше 1 рубля, чтобы потом доехать в C_1 . Итого в этом случае надо больше 12 рублей.

Случай 2. Пусть Пятачок в D приедет из C_1 , заплатив 3 рубля. Рассмотрим два случая, каков может быть проезд в C_1 : либо из B , либо из C .

Случай 2.1. Пусть Пятачок в C_1 приедет из B , заплатив 6 рублей. Но, чтобы выехать из A , Пятачку понадобится не меньше 4 рублей. Итого в этом случае требуется хотя бы $4+6+3 > 12$ рублей.

Случай 2.2. Пусть Пятачок в C_1 приедет из C , заплатив 2 рубля. Если маршрут Пятачка содержит B , то, чтобы доехать от A до B , надо хотя бы 5 рублей, а чтобы доехать от B до C , надо хотя бы 4 рубля. Итого надо хотя бы $5+4+2+3 > 12$ рублей. Если же маршрут Пятачка не содержит B , то он проходит через B_1 . В этом случае общая стоимость составляет $4 + 3 + 2 + 3 = 12$ рублей.

Итак, на маршруте $A-B_1-C-C_1-D$ достигается наименьшая цена поездки, которая составляет 12 рублей. □

Другое решение. Воспользуемся обозначениями остановок из предыдущего решения. Выкинем отрезки дорог, которые можно объехать, потратив меньшее или то же количество рублей. А именно, отрезок $C-D$ можно объехать дешевле по пути $C-C_1-D$, отрезок $B-C_1$ можно объехать за ту же стоимость по $B-C-C_1$, $B-C$ можно объехать по $B-B_1-C$, а $A-B$ по $A-B_1-B$.

В оставшейся сети дорог (рис. 5) перебрать варианты уже не составляет труда. □

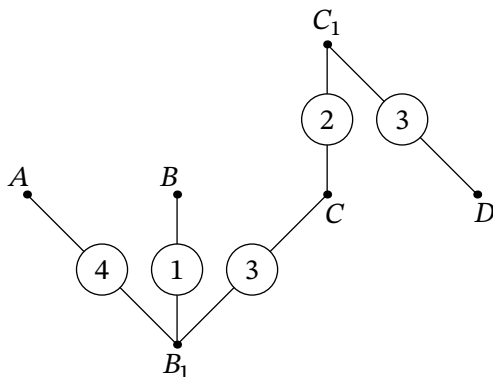


Рис. 5: к решению задачи 6.1

Задача 6.2. Денис расставил числа в клетки квадрата 3×3 так, что в каждой строке и в каждом столбце одно число равно сумме двух других. А Лёша стёр числа 1, 2, 3 и 4 и вместо них написал буквы A, B, C и D . Получившийся квадрат изображён на рисунке.

<i>A</i>	7	<i>B</i>
5	8	3
<i>C</i>	1	<i>D</i>

Где какие числа стояли первоначально?

- | | |
|---------------------------|---------------------|
| (a) Вместо буквы <i>A</i> | (1) стояло число 1. |
| (b) Вместо буквы <i>B</i> | (2) стояло число 2. |
| (c) Вместо буквы <i>C</i> | (3) стояло число 3. |
| (d) Вместо буквы <i>D</i> | (4) стояло число 4. |

Ответ: $A = 3, B = 4, C = 2, D = 1$.

Решение. В верхней строке число 7 — наибольшее, поэтому оно равно сумме A и B . Поскольку A и B — различные цифры, не превосходящие 4, то A и B — это 3 и 4 (либо наоборот).

Если $B = 3$, то в правом столбце 3 не может быть суммой 3 и D , а также D не может быть суммой 3 и 3 (так как $D < 6$).

Значит, $B \neq 3$. Тогда $A = 3$ и $B = 4$. Так как в левом столбце число 5 — наибольшее, то оно равно сумме A и C , т. е. $C = 2$. Методом исключения получаем $D = 1$. Легко проверить, что расстановка $A = 3, B = 4, C = 2, D = 1$ удовлетворяет всем условиям задачи. $\square$

Задача 6.3. В 8:00 рейсовый автобус выехал из города A и поехал в сторону города B со скоростью 64 км/ч. Доехав до города B , он сразу же развернулся и поехал обратно. В 12:30 автобусу оставалось 10 км до города A . Сколько километров от одного города до другого? (Всё время движения автобус ехал с постоянной скоростью.)

Ответ: 149.

Решение. С 8:00 до 12:30 автобус ехал 4,5 часа со скоростью 64 км/ч, поэтому он проехал $4,5 \cdot 64 = 288$ км. Если бы он проехал ещё 10 км, то в совокупности он проехал бы удвоенное расстояние между A и B . Значит, искомое расстояние равно $\frac{288 + 10}{2} = 149$ км. $\square$

Задача 6.4. Три богатыря Алёша Попович, Добрыня Никитич и Илья Муромец, несколько дней января дежурят на границе. Каждый из богатырей один день дежурит и несколько дней отдыхает, потом опять один день дежурит и несколько дней отдыхает и т. д. Богатырь всегда отдыхает одно и то же число дней, но у разных богатырей количество дней отдыха может различаться. Известно, что 1 января дежурили Алёша и Добрыня, 5 января — Илья и Алёша, а 8 января — Добрыня и Илья. Какого января богатыри впервые будут на дежурстве все вместе?

Ответ: 29.

Решение. Назовём *периодом* богатыря наибольшее число дней, в течение которых он отдыхает, увеличенное на 1. Ясно, что каждый богатырь с периодом d появляется на дежурстве один раз в d дней. А если богатырь дежурил в дни, между которыми прошло k дней, то это k должно делиться на d . Также по условию период каждого богатыря больше 1.

Добрыня дежурил 1 и 8 января, между которыми прошло 7 дней. Поскольку 7 — простое число, период Добрыни равен 7.

Илья дежурил 5 и 8 января, между которыми прошло 3 дня. Поскольку 3 — простое число, период Ильи равен 3.

Алёша дежурил 1 и 5 января, между которыми прошло 4 дня. Значит, период Алёши равен 2 или 4.

Предположим, что богатыри встретились на дежурстве все вместе N -го января, где $N \leq 31$. Поскольку Добрыня дежурил 8-го и N -го, необходимо, чтобы $N - 8$ делилось на 7. Поскольку Илья дежурил 8-го и N -го, необходимо, чтобы $N - 8$ делилось на 3. Тогда $N - 8$ должно делиться на 21. Единственное возможное $N \neq 8$ с таким условием, не превосходящее 31, — это 29. Заметим также, что 29 января все богатыри действительно встретятся, ведь $29 - 8$ делится на 3 и на 7 — периоды Ильи и Добрыни, а $29 - 1$ делится на 4, т. е. заведомо делится на период Алёши. $\square$

Задача 6.5. Учитель написал на доске натуральное число. Руслан заметил, что

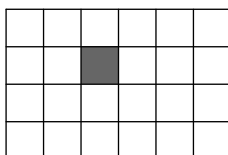
- при делении на 4 оно даёт остаток 1;
- при делении на 5 оно даёт остаток 2;
- при делении на 6 оно даёт остаток 3.

Какое наименьшее значение может принимать число, написанное на доске?

Ответ: 57.

Решение. Если число Руслана увеличить на 3, то оно будет делиться на 4, 5, 6, т. е. делиться и на их НОК, равный 60. Поскольку полученное число натуральное, то оно не меньше 60. Значит, число Руслана не меньше $60 - 3 = 57$. Легко проверить, что 57 удовлетворяет всем условиям задачи. $\square$

Задача 6.6. Из прямоугольника 4×6 вырезали одну клетку, как показано на рисунке. Сколько существует способов вырезать ещё одну клетку так, чтобы оставшуюся фигуру можно было разрезать на прямоугольники 1×2 ?



Ответ: 12.

Решение. Покрасим доску 4×6 в шахматную раскраску так, чтобы клетка на рисунке оказалась чёрной. Тогда во всём прямоугольнике 4×6 чёрных и белых клеток поровну, по 12. Но раз исходную клетку вырезали, осталось 12 белых и 11 чёрных клеток.

Если вырезать ещё одну чёрную клетку, останется 12 белых и 10 чёрных клеток. Но тогда оставшуюся фигуру на прямоугольнички 1×2 разрезать нельзя, ведь каждый прямоугольник 1×2 занимает поровну чёрных и белых клеток.

Если же вырезать белую клетку, то оставшуюся фигуру на прямоугольнички 1×2 разрезать можно. Это можно проверить либо непосредственным перебором, либо с помощью следующего рассуждения.

Рассмотрим произвольную «змейку», проходящую по 23 клеткам исходного прямоугольника, кроме первой вырезанной (например, такую как на рис. 6). В этой змейке чередуются чёрные и белые клетки. Если из доски вырезается ещё одна белая клетка, то «змейка» распадается на две части, каждая из которых проходит по чётному числу клеток (так как их концы разных цветов). Но тогда каждую из этих частей можно разделить на кусочки по 2 клетки. Это и соответствует разрезанию оставшейся фигуры на прямоугольнички 1×2 . □

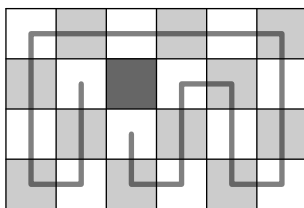
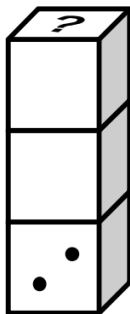


Рис. 6: к решению задачи 6.6

Задача 6.7. Есть 3 абсолютно одинаковых кубика, у каждого из которых на одной грани отмечена 1 точка, на другой — 2 точки, ..., на шестой — 6 точек. Причём на любых двух противоположных гранях суммарно отмечено 7 точек.

Из них сложили «башенку» так, что на каждой паре склеенных граней суммарно отмечено 5 точек. На всех гранях, кроме одной, все точки стёрли, как показано на рисунке. Сколько точек было отмечено на верхней грани?



Ответ: 5.

Решение. На верхней грани нижнего кубика точно не 2 точки (так как 2 точки на передней грани); точно не 5 и не 6 точек, так как на склеенных гранях суммарно 5 точек. Остальные случаи разберём ниже.

Случай 1. На верхней грани нижнего кубика 4 точки.

Тогда на склеенной с ней грани среднего кубика 1 точка, а на верхней грани среднего кубика — 6 точек. Получаем противоречие, так как на нижней грани верхнего кубика и верхней грани среднего кубика суммарно 5 точек.

Случай 2. На верхней грани нижнего кубика 3 точки.

Тогда на склеенной с ней грани среднего кубика 2 точки, а на верхней грани среднего кубика — 5 точек. Получаем противоречие, так как на нижней грани верхнего кубика и верхней грани среднего кубика суммарно 5 точек.

Случай 3. На верхней грани нижнего кубика 1 точка.

Тогда на склеенной с ней грани среднего кубика 4 точки, а на верхней грани среднего кубика — 3 точки. Следовательно, на нижней грани верхнего кубика 2 точки, а на верхней грани — 5 точек. Несложно проверить, что конфигурация кубиков с такими условиями возможна. □

Задача 6.8. Однажды старый пират позвал к себе боцмана и кока и вручил им карту прямоугольного острова, показанную на рисунке.

- Старый пират: «Как вы видите, остров поделён на 24 квадратных области. В одной из 10 закрашенных областей я зарыл клад.»

Далее пират прошептал на ухо боцману лишь букву (*A*, *B*, *C* или *D*) области, где зарыл клад, а коку — лишь номер (1, 2, 3, 4, 5 или 6) этой области. Вечером того же дня между коком и боцманом состоялся следующий диалог.

- Боцман: «Я не знаю, где старый пройдоха зарыл клад, но я уверен, что и ты не знаешь этого!»

- Кок: «Ха! До разговора с тобой я тоже не знал, где клад, но теперь знаю!»
- Боцман: «Разрази меня гром! И я теперь знаю, где клад!»

В какой области старый пират зарыл клад?

	1	2	3	4	5	6
A						
B						
C						
D						

Ответ: C3.

Решение. Проанализируем первую фразу Боцмана.

- Боцман: «Я не знаю, где старый пройдоха зарыл клад, но я уверен, что и ты не знаешь этого!»

Если бы боцману сказали, что клад в строке A или B, то он бы не мог быть уверен, что кок не знает, где клад (так как клад теоретически мог находиться в A6 или B5, а тогда бы кок по номеру столбца мог понять, где клад).

Кок делает те же рассуждения, что и мы, поэтому понимает, что клад находится в строке C или D. В этот момент он понимает, где находится клад.

- Кок: «Ха! До разговора с тобой я тоже не знал, где клад, но теперь знаю!»

Если бы коку сказали, что клад в первом столбце, то он бы не мог точно понять, в какой из клеток A1 и B1 он находится. Значит, клад не в первом столбце, т. е. он в одной из клеток D2, C3, D4.

Но теперь и боцман понял, где клад.

- Боцман: «Разрази меня гром! И я теперь знаю, где клад!»

Если бы боцману сказали, что клад в строке D, то он бы не мог точно понять, в какой из клеток D2 и D4 он находится. Значит, клад в строке C, т. е. в клетке C3. □

7 класс

Задача 7.1. Из квадрата 5×5 вырезали одну клетку. Оставшуюся фигуру разрезали по границам клеток на прямоугольники так, что внутри каждого прямоугольника стоит ровно одно число, равное его площади.

Откуда могла быть вырезана клетка?

	1	2	3	4	5
A	5				
B				2	
C	3				
D		4		2	
E	4				4

(a) Строка A

(b) Строка B

(c) Строка C

(d) Строка D

(e) Строка E

(1) столбец 1

(2) столбец 2

(3) столбец 3

(4) столбец 4

(5) столбец 5

Ответ: b2.

Решение. Посмотрим на цифру 5. Она может стоять только внутри прямоугольника 1×5 , расположение этого прямоугольника определяется однозначно.

Теперь посмотрим на цифру 4 в нижнем левом углу. Она расположена либо в квадрате 2×2 , либо в прямоугольнике 1×4 . Возможен только второй вариант.

	1	2	3	4	5
A	5				
B				2	
C	3				
D		4		2	
E	4				4

Для цифры 4 из нижнего правого угла прямоугольник также определяется однозначно.

	1	2	3	4	5
A	5				
B				2	
C	3				
D		4		2	
E	4				4

Осталась одна цифра 4, для которой мы ещё не определили расположение прямоугольника. Есть ровно один квадрат 2×2 , который не содержит других цифр.

	1	2	3	4	5
A	5				
B				2	
C	3				
D		4		2	
E	4				4

Расположение оставшихся прямоугольников определяется однозначно.

	1	2	3	4	5
A	5				
B				2	
C	3				
D		4		2	
E	4				4

Задача 7.2. У короля есть три сундука с монетами. В одном сундуке все монеты золотые, а надпись на нём истинная. В другом сундуке все монеты серебряные, а надпись на нём ложная. В оставшемся сундуке все монеты медные, а про достоверность надписи ничего не известно. На сундуках написано следующее:



В каком сундуке что лежит?

- | | |
|-----------------------------|-----------------------|
| (a) В первом сундуке лежат | (1) золотые монеты |
| (b) Во втором сундуке лежат | (2) серебряные монеты |
| (c) В третьем сундуке лежат | (3) медные монеты |

Ответ: a2 b3 c1

Решение. Предположим, в первом сундуке лежат золотые монеты. Тогда в третьем сундуке монеты серебряные. Тогда во втором сундуке должны лежать медные монеты, но в этом случае надпись на сундуке с серебряными монетами истинная. Противоречие.

Во втором сундуке золотые монеты лежать тоже не могут, иначе надпись про медные монеты в нём оказалась бы ложной.

Значит, золотые монеты лежат в третьем сундуке. Тогда надписи на третьем и втором сундуках истинны, поэтому во втором сундуке лежат медные монеты. Тогда в первом сундуке лежат серебряные монеты, и надпись на нём ложная. □

Задача 7.3. Ваня заменил некоторые буквы алфавита однозначными или двузначными числами, используя только цифры 1, 2, 3 и 4 (разные буквы он заменял разными числами). Он записал слова ДЕНЬ, НОЧЬ, СВЕТ, ТЕНЬ в некотором порядке и получил 4 таких числа: 311124, 141434, 424434, 241434. А какое число получится при такой замене из слова ОТВЕТ?

Ответ: 22411124.

Решение. Все данные шифры шестизначные.

Заметим, что ДЕНЬ и ТЕНЬ отличаются только по первой букве, заменённой однозначным или двузначным числом, поэтому 4 последние цифры у них одинаковы. Среди данных

чисел с таким свойством есть только 141434 и 241434, это и есть ДЕНЬ и ТЕНЬ (либо наоборот). Тогда СВЕТ и НОЧЬ — это 311124 и 424434 (либо наоборот).

Наблюдая за последними буквами, ясно, что Ъ заканчивается на 4.

Предположим, что Ъ однозначно, т. е. Ъ = 4.

Случай 1. При Ъ = 4 предположим, что НОЧЬ = 311124, тогда СВЕТ = 424434. Поскольку СВЕТ заканчивается на Т, а Т и Ъ зашифрованы по-разному, получаем Т = 34. Но ТЕНЬ не может начинаться на 34 — противоречие.

Случай 2. При Ъ = 4 предположим, что НОЧЬ = 424434, тогда СВЕТ = 311124. Поскольку СВЕТ заканчивается на Т, а Т и Ъ зашифрованы по-разному, Т = 24. Также в СВЕТ перед Т идёт Е, а в шифре перед 24 идёт 111. Значит, Е = 1 или Е = 11. Поскольку ТЕНЬ начинается на Т = 24, ТЕНЬ = 241434. Значит, ЕН = 143. Следовательно, Е = 1, а Н = 43. Но НОЧЬ не может начинаться на 43 — противоречие.

Следовательно, Ъ двужначен. Поскольку это окончание встречается у нескольких слов, Ъ = 34. Значит, СВЕТ = 311124, тогда НОЧЬ = 424434.

ТЕНЬ начинается на Т, а также равно 141434 или 241434, поэтому Т равно 1, 2, 14 или 24. СВЕТ = 311124 оканчивается на Т, поэтому Т = 24.

ТЕНЬ = 241434, при этом Т = 24 и Ъ = 34, тогда Е = 1 и Н = 4.

НОЧЬ = 424434, при этом Н = 4 и Ъ = 24, тогда ОЧ = 244 (при этом Ч не может равняться 4 = Н), поэтому Ч = 44 и О = 2.

СВЕТ = 311124, при этом Е = 1 и Т = 34, тогда СВ = 311 (при этом В не может равняться 1 = Е), поэтому В = 11 и С = 3.

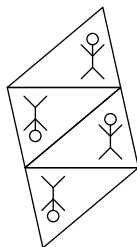
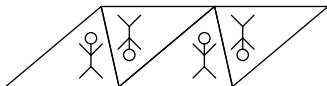
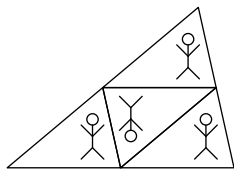
Итак, ОТВЕТ = 22411124. □

Задача 7.4. Фермер растил овец и баранов. Весной баранов было 40% от общего числа животных. Летом фермер купил несколько баранов, после чего овец стало 20%. А осенью он купил несколько овец, и баранов опять стало 40%. Во сколько раз увеличилось поголовье всего стада по сравнению с весной?

Ответ: 6.

Решение. Пусть весной было x животных, среди которых было $0,4x$ баранов и $0,6x$ овец. После летней покупки количество овец сохранилось и стало в 4 раза меньше количества баранов (так как $\frac{80\%}{20\%} = 4$), поэтому баранов стало $0,6x \cdot 4 = 2,4x$. После осенней покупки количество баранов сохранилось и стало в 1,5 раза меньше количества овец (так как $\frac{60\%}{40\%} = 1,5$), поэтому овец стало $2,4x \cdot 1,5 = 3,6x$. Итого поголовье всего стада стало равно $2,4x + 3,6x = 6x$, что в 6 раз больше исходного поголовья. □

Задача 7.5. Из четырёх одинаковых треугольников можно составить три фигуры, изображённые на рисунке. Периметр одной из фигур равен 44 см. Найдите периметры двух других фигур, если известно, что периметр треугольника равен 21 см.



Ответ: 40, 42.

Решение. На левом рисунке расположены 3 одинаково повёрнутых треугольника. Назовём их левую сторону a , правую b , нижнюю c . По условию $a + b + c = 21$.

Периметр левой фигуры равен $2a + 2b + 2c = 2 \cdot 21 = 42$, средней — $2a + 4c$, а правой — $2a + 4b$. Заметим, что сумма периметров средней и правой фигур равна удвоенному периметру первой фигуры, так как $2a + 4c + 2a + 4b = 2(2a + 2b + 2c)$. Значит, сумма 44 и некоторого числа равна $2 \cdot 42 = 84$, поэтому это число равно 40. $\square$

Задача 7.6. Паша и Вова решили сыграть в «Морской бой». Паша рисует на клетчатой доске 5×5 четыре корабля в виде прямоугольников 1×1 , 1×3 , 1×4 и 1×5 по линиям сетки (корабли не могут соприкасаться друг с другом даже по точке). Затем Вова поочерёдно называет клетки, в которые «стреляет» (Вова не знает расстановку кораблей Паши); в случае попадания он ставит в данную клетку крестик, а в случае промаха — нолик.

Вова сделал 4 выстрела. У него получилась следующая картина:

	×			
		×		
	○			
				○

Какое наименьшее количество выстрелов придётся ещё сделать Вове, чтобы гарантированно потопить все Пашины корабли? (Корабль считается потопленным, если все клетки данного корабля были подбиты.)

Ответ: 12.

Решение. Обозначим столбцы слева направо a, b, c, d, e , пронумеруем строчки снизу вверх 1, 2, 3, 4, 5, как на рис. 7.

Корабль 1×5 занимает целиком строчку или столбец. Столбцы a, b, c, d он занимать не может (иначе будет соприкосновение с клеткой $b5$ или $c3$), в столбце e он находится также не может. Значит, он занимает одну из строк. Строку 4 он занимать не может (иначе будет соприкосновение с клеткой $b5$), в строках 1, 2 он находится также не может. Значит, он

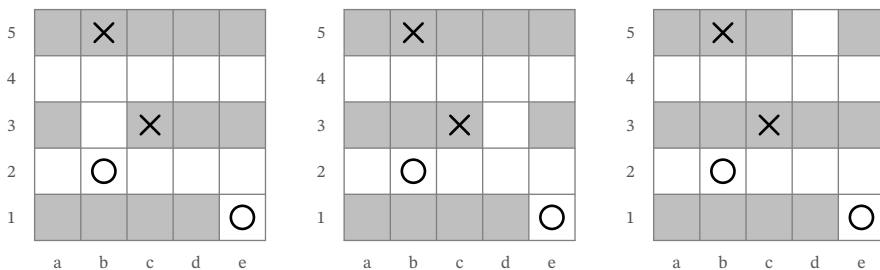


Рис. 7: к решению задачи 7.6

находится в строке 1 или 3. Ясно, что при этом 1×4 обязан располагаться горизонтально, в одной из строк, не соседних со строкой 1×5 . Тогда 1×1 и 1×3 обязаны располагаться в строке, не соседней со строками 1×4 и 1×5 . Значит, в одной из строк 1, 3, 5 располагается корабль 1×5 , в другой — 1×4 , в оставшейся — 1×1 и 1×3 . Ясно, что в строке 1 не могут располагаться одновременно корабли 1×1 и 1×3 , как и корабль 1×5 . Значит, в строке 1 располагается корабль 1×4 . Разберём несколько случаев, где может располагаться 1×5 .

Случай 1. Пусть 1×5 лежит в строке 5. Тогда 1×1 и 1×3 лежат в строке 3, и возможны 2 варианта: либо они занимают клетки а3 и с3, d3, e3 (первая расстановка на рис. 7), либо e3 и а3, b3, с3 (вторая расстановка).

Случай 2. Пусть 1×5 лежит в строке 3. Тогда 1×1 и 1×3 лежат в строке 3, и возможен только 1 вариант: они занимают клетки e5 и а5, b5, с5 (третья расстановка на рисунке).

Суммарно Вове надо подбить $5 + 4 + 3 + 1 = 13$ клеток, две из которых он уже подбил. Значит, ему осталось подбить 11 клеток. Поскольку возможны несколько случаев расстановок, то ему необходимо «право на ошибку», т. е. требуется хотя бы 12 выстрелов (так, в случае первой или второй расстановки Вова обязан хотя бы раз выстрелить в b3 или d3, но первым таким выстрелом может промазать).

За 12 выстрелов Вова справится. Пусть он сначала стреляет в клетки а1, b1, с1, d1 и топит корабль 1×4 . Дальше он стреляет в клетку b3.

Если он промахивается, то расстановка кораблей точно первая, и оставшимися 7 выстрелами а5, с5, d5, e5, а3, d3, e3 он топит все корабли. Если он выстрелом в b3 не промахивается, то расстановка кораблей точно не первая. Дальше он стреляет в d3. Если он промахивается, то расстановка точно вторая, и оставшимися 6 выстрелами а5, с5, d5, e5, а3, e3 он топит все корабли. Если же он не промахивается, то расстановка точно третья, и оставшимися выстрелами в а5, с5, e5, а3, e3 он топит все корабли. $\square$

Задача 7.7. На центральной улице города строят три новых многоэтажных дома. Пятого октября у каждого дома было построено несколько этажей, причём количество этажей в первом доме равнялось суммарному количеству этажей во втором и третьем домах.

Каждую следующую неделю второму дому достраивали в два раза больше этажей, чем достраивали первому, а третьему дому достраивали на один этаж меньше, чем достраивали второму (в разные недели количество достроенных этажей могло быть разным). Через 11 недель в каждом доме стало 40 этажей. Сколько этажей было построено у первого дома пятого октября?

Ответ: 23.

Решение. Пусть пятого октября у второго дома было построено x этажей, у третьего у y этажей, тогда у первого дома было построено $x + y$ этажей. Пусть в течение следующих 11 недель первому дому пристроили a этажей. Тогда второму дому пристроили вдвое больше, то есть $2a$ этажей. В течение каждой из 11 недель третьему дому пристраивали на 1 этаж меньше, чем второму дому, поэтому третьему дому за 11 недель пристроили $2a - 11$ этажей.

По условию $x + y + a = y + 2a = y + 2a - 11 = 40$. Из первого равенства следует, что $y = a$. Тогда из третьего равенства получаем $3a - 11 = 40$, откуда $a = 17$. Теперь из первого равенства получаем $x + y = 40 - a = 40 - 17 = 23$ — количество этажей у первого дома пятого октября. $\square$

Задача 7.8. В террариуме живут несколько хамелеонов. Каждый хамелеон может окраситься в один из трёх цветов: красный, синий и зелёный. Игорь следил за ними 4 дня и заметил следующее:

- Хамелеон весь день одного цвета, а на следующий день обязательно этот цвет меняет на один из двух других;
- Окрас каждого хамелеона на четвёртый день совпадал с его окрасом в первый день;
- Любые два хамелеона хотя бы в один из четырёх дней имели одинаковый окрас.

Сколько красных хамелеонов было в первый день, если известно, что в третий день было 20 зелёных хамелеонов, а в четвёртый — 13 синих?

Ответ: 7.

Решение. Для краткости красный цвет будем обозначать К, синий — С, зелёный — З. Последовательность из цветов в подряд идущие 4 дня будем обозначать 4 соответствующими подряд идущими заглавными буквами.

Из первых двух условий следует, что у каждого хамелеона в течение 4 дней была либо комбинация окрасов КСЗК, СЗКС, ЗКСЗ (их назовём *интересными*), либо комбинация окрасов КЗСК, СКЗС, ЗСКЗ (их назовём *любопытными*). Далее будем кратко обозначать $a_K = \text{КСЗК}$, $a_C = \text{СЗКС}$, $a_Z = \text{ЗКСЗ}$, $b_K = \text{КЗСК}$, $b_C = \text{СКЗС}$, $b_Z = \text{ЗСКЗ}$.

Заметим, что у разных хамелеонов не могли быть разные интересные комбинации окрасов (иначе не выполнялось бы третье условие), аналогично не могли быть и разные любопытные комбинации окрасов. Несложно проверить, что при этом у произвольных ин-

тересной и любопытной комбинации хотя бы в один из дней совпадает цвет, т. е. третье условие задачи для них выполняется.

По условию в третий день было 20 зелёных хамелеонов, а в четвёртый — 13 синих. Это означает, что суммарно было 20 комбинаций a_K и b_3 , а также 13 комбинаций a_C и b_C .

Если бы было менее 13 комбинаций b_C , то нашлись бы одновременно интересные комбинации a_K и a_C , что невозможно.

Следовательно, было ровно 13 комбинаций b_C , тогда комбинаций a_K ровно 7, при этом остальных комбинаций не было. Но тогда красные хамелеоны в первый день присутствуют только в 7 комбинациях a_K , т. е. их было ровно 7. $\square$

8 класс

Задача 8.1. У Пети есть мешочек с карточками: на 14 карточках нарисована цифра «5» и ещё на нескольких нарисован знак «+».

С помощью пяти карточек с цифрой «5» и трёх карточек со знаком «+» Петя мог бы составить арифметическое выражение, равное 70:

$$55 + 5 + 5 + 5 = 70.$$

Но он решил использовать все карточки, находящиеся в мешочке, и смог составить арифметическое выражение, равное 295. Сколько карточек со знаком «+» могло быть в мешочке?

Ответ: 8.

Решение. Ясно, что Петя не ставил хотя бы три «5» подряд, иначе сумма была бы больше 295. Значит, каждое из слагаемых Пети либо равно «5», либо «55».

Если слагаемых «55» хотя бы 6, то общая сумма не меньше $55 \cdot 6 > 295$, что невозможно. Если слагаемых «55» было не больше 4, то слагаемых «5» должно быть хотя бы $\frac{295 - 55 \cdot 4}{5} = 15$, но карточек всего 14. Значит, слагаемых «55» было ровно 5, а слагаемых «5» ровно $\frac{295 - 55 \cdot 5}{5} = 4$ (при этом использовано ровно 14 карточек с цифрой «5»). Между 9 такими слагаемыми должно стоять 8 плюсов. $\square$

Задача 8.2. Семь гномов работали на золотом руднике. В первый день каждый гном нашёл несколько самородков золота — в таблице отмечено, кто сколько нашёл. Во второй день никто из гномов не нашёл новые самородки золота, поэтому каждый гном решил подарить по одному самородку всем гномам старше него — в таблице отмечено, сколько самородков оказалось у первых пяти гномов в конце второго дня.

Известно, что нет двух гномов, родившихся в один день. Сколько самородков оказалось у шестого и седьмого гномов?

	Первый день	Второй день
Первый гном	4	8
Второй гном	7	5
Третий гном	8	2
Четвёртый гном	6	6
Пятый гном	3	5
Шестой гном	1	?
Седьмой гном	5	?

Ответ: У шестого гнома 7, у седьмого гнома 1.

Решение. Если в первый день у гнома было a самородков, а во второй b , то назовём *приростом* для этого гнома величину $b - a$.

i -й по старшинству гном (старше которого ровно $i - 1$ гном среди остальных) отдаёт $i - 1$ самородков более старшим гномам, а также получает от более молодых гномов $7 - i$ самородков. Тогда его прирост равен $8 - 2i$. Значит, прирост может принимать значения 6, 4, 2, 0, -2, -4, -6, каждое по одному разу.

По таблице видно, что у гномов с 1-го до 5-го приросты равны 4, -2, -6, 0, 2 самородков соответственно, поэтому у двух оставшихся приросты равны 6 и -4. У шестого гнома менее 4 самородков, поэтому его прирост равен 6, тогда у седьмого гнома прирост равен -4. Значит, у шестого гнома стало $1 + 6 = 7$ самородков, а у седьмого — $5 - 4 = 1$. $\square$

Задача 8.3. Андрей загадал 30 натуральных чисел. Про них известно, что

- 26 чисел делятся на 2;
- 25 чисел делятся на 3;
- 24 числа делятся на 4;
- 23 числа делятся на 5.

Какое наименьшее количество чисел может делиться на 60?

Ответ: 12.

Решение. Из условия следует, что

- 5 чисел не делятся на 3,
- 6 чисел не делятся на 4,
- 7 чисел не делятся на 5.

Тогда не делятся хотя бы на одно из чисел 3, 4, 5 не более $5 + 6 + 7 = 18$ чисел. Получается, что хотя бы $30 - 18 = 12$ чисел делятся на 3, 4, 5, и все они обязаны делиться на $\text{НОК}(3, 4, 5) = 60$.

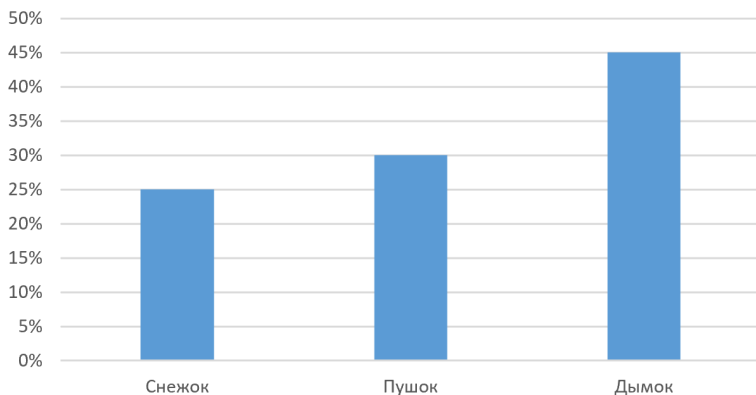
Заметим, что ровно 12 чисел могут делиться на 60. Такое возможно, например, в наборе, который состоит из

- 12 чисел, равных 60,
- 7 чисел, равных 12,
- 4 чисел, равных 15,
- 5 чисел, равных 20,
- 2 чисел, равных 30.

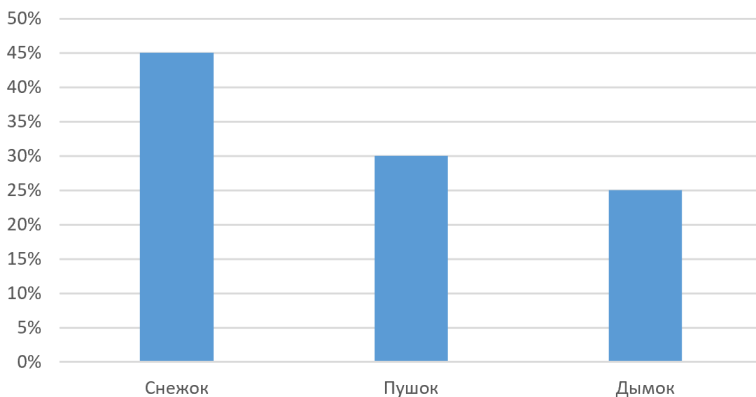
$\square$

Задача 8.4. В одной социальной сети проходило голосование «Какой кот самый милый?» В голосовании участвовали коты Снежок, Пушок и Дымок.

К концу первого дня голосования распределение голосов было следующим:



В течение второго дня проголосовали ещё 2400 человек, при этом никто не отдал свой голос за Дымка. К концу второго дня голосования распределение голосов было следующим:



На этом голосование завершилось. Сколько человек приняли участие в голосовании?

Ответ: 5400.

Решение. Пусть к концу первого дня проголосовали x человек, тогда за Снежка отдали голос $0,25x$, за Пушка $0,3x$, за Дымка $0,45x$.

К концу второго дня Пушок набрал 30%, а Дымок — 25%, поэтому Пушок набрал в $\frac{6}{5}$ раз больше голосов, чем Дымок. Значит, Пушок в итоге набрал $0,45x \cdot \frac{6}{5} = 0,54x$, и проголосовали за него во второй день $0,54x - 0,3x = 0,24x$ раз.

Аналогично, к концу второго дня Снежок набрал 45%, а Дымок — 25%, поэтому Снежок набрал в $\frac{9}{5}$ раз больше голосов, чем Дымок. Значит, Снежок в итоге набрал $0,45x \cdot \frac{9}{5} = 0,81x$, и проголосовали за него во второй день $0,81x - 0,25x = 0,56x$ раз.

По условию во второй день проголосовали 2400 человек, поэтому $3000 = 0,24x + 0,56x = 0,8x$, откуда $x = 3000$. Тогда всего голосовало $3000 + 2400 = 5400$ человек. $\square$

Задача 8.5. Для написания контрольной работы 24 школьника посадили за круглый стол. Каждый из них произнёс две фразы:

- Мой сосед слева за контрольную получит пятёрку.
- Мой сосед справа за контрольную не получит пятёрку.

После оглашения результатов контрольной выяснилось, что пятёрки получили только школьники, сказавшие ровно одно верное утверждение.

Какое наименьшее количество пятёрок могли поставить за контрольную?

Ответ: 8.

Решение. Назовём получившего пятёрку школьника *молодцом*, а не получившего пятёрку — *немолодцом*. Из условия следует, что молодцы — это те, кто сказал ровно одно верное утверждение, т. е. чьи соседи либо оба молодцы, либо оба немолодцы.

Приведём пример с 8 молодцами. Пронумеруем по часовой стрелке людей за столом числами от 1 до 24. Пусть молодцы — те, чей номер делится на 3, а все остальные — немолодцы. Легко проверить, что все условия выполняются. Докажем теперь, что пятёрок в любом случае не меньше 8.

Если где-то за столом найдутся два соседа-молодца, то, идя по часовой стрелке, получаем, что правый сосед правого молодца тоже молодец, его правый сосед — тоже молодец, и так далее; все за столом молодцы, и их уже 24.

Пусть теперь никакие два молодца не сидят рядом. Тогда в каждой тройке подряд идущих людей не менее одного молодца. Действительно, иначе в тройке подряд идущих немолодцов средний немолодец сказал бы ровно одно верное утверждение, что невозможно. Значит, разбив всех людей на 8 непересекающихся троек, получим, что молодцов не меньше 8. $\square$

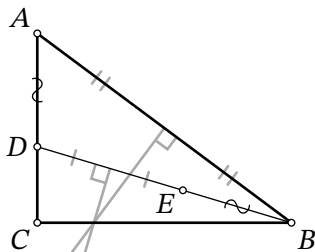
Задача 8.6. Если первый маляр будет работать 5 часов, второй — 6 часов, а третий — 8 часов, то они полностью покрасят забор. Если же первый маляр будет работать 4 часа, второй — 5 часов, а третий — 7 часов, то они покрасят только 85% забора. Сколько минут потребуется малярам, чтобы покрасить весь забор, если они будут работать все вместе одинаковое время?

Ответ: 400.

Решение. В первой ситуации, по сравнению со второй, каждый из маляров работал ровно на 1 час больше, и покрасили они на 15% забора больше. Значит, за 1 час совместной

работы они красят 15% забора. Тогда, чтобы покрасить весь забор, всего им потребуется $60 \cdot \frac{100}{15} = 400$ минут. $\square$

Задача 8.7. На стороне AC прямоугольного треугольника ABC (угол C — прямой) отмечена точка D . На отрезке BD отмечена точка E так, что $BE = AD$. Оказалось, что серединные перпендикуляры к отрезкам AB и DE пересекаются на отрезке BC . Найдите длину отрезка BD , если известно, что $AD = 9$, $DC = 7$.



Ответ: 23.

Решение. Пусть X — точка пересечения данных серединных перпендикуляров, а M — середина DE (рис. 8). Поскольку серединный перпендикуляр — множество точек, равноудалённых от концов отрезка, то $AX = BX$ и $DX = EX$. Тогда треугольники ADX и BEX рав-

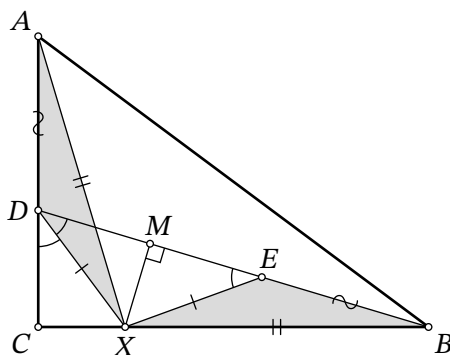
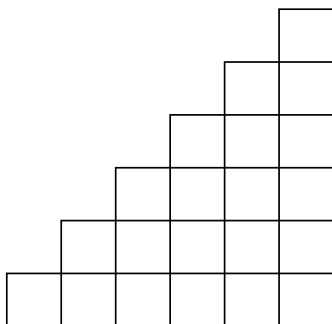


Рис. 8: к решению задачи 8.7

ны по трём сторонам, поэтому равны углы ADX и BEX , откуда $\angle CDX = \angle DEX = \angle EDX$ (так как треугольник DEX равнобедренный). Заметим, что прямоугольные треугольники DCX и DMX равны по гипотенузе и острому углу при вершине D , поэтому $DM = DC$. Следовательно, $BD = BE + 2DM = AD + 2DC = 9 + 2 \cdot 7 = 23$. $\square$

Задача 8.8. Найдите количество способов закрасить некоторые клетки «лесенки» так, чтобы выполнялись следующие условия:

- Ниже каждой закрашенной клетки либо нет других клеток, либо они все закрашены.
- В одном столбце закрашено 5 клеток, в другом — 4 клетки, в третьем — 3 клетки, ..., в последнем — 0 клеток.



Ответ: 32.

Решение. Из первого условия следует, что в каждом столбце снизу вверх идёт несколько закрашенных клеток подряд (возможно, 0), а сверху от них все клетки незакрашенные (если они вообще есть).

Рассмотрим столбец с 5 закрашенными клетками. Легко понять, что это один из двух правых столбцов лесенки, то есть его можно выбрать двумя способами. Назовём столбец с 5 закрашенными клетками *использованным* и не будем его далее рассматривать.

Осталось 5 столбцов. В одном из них 4 закрашенные клетки. Легко понять, что это один из двух правых пока не использованных столбцов лесенки, то есть его тоже можно выбрать двумя способами. Назовём столбец с 4 закрашенными клетками *использованным* и тоже выбросим из рассмотрения.

Аналогичным образом последовательно рассмотрев столбцы с 3, 2 и 1 закрашенными клетками, мы увидим, что на очередном шаге каждый из них можно выбрать двумя способами, если столбцы с большим количеством закрашенных клеток уже выбраны. В итоге всю раскраску можно выбрать $2^5 = 32$ способами. $\square$

9 класс

Задача 9.1. Клетки полоски 1×7 покрасили в красный, синий и зелёный цвета (все три цвета присутствуют). Оказалось, что среди всех клеток есть ровно 4, рядом с которыми есть соседняя по стороне клетка зелёного цвета. Какое наибольшее количество красных клеток может быть?

Ответ: 4

Решение. Так как соседей зелёных клеток не более чем в два раза больше, чем самих зелёных клеток, то зелёных клеток не меньше 2. Также по условию синих клеток не меньше 1, поэтому красных клеток не больше $7 - 2 - 1 = 4$.

Ровно 4 красные клетки возможны, например, в такой раскраске: КЗККЗКС. □

Задача 9.2. Из числа 345 Арнольд вычитает наименьший его натуральный делитель, отличный от 1. Из полученной разности он также вычитает наименьший её натуральный делитель, отличный от 1, и т. д. В некоторый момент Арнольд получил число 0 и остановился. Сколько всего он совершил вычитаний?

Ответ: 172.

Решение. Ясно, что из 345 вычли 3, и осталось число 342. Так как оно чётное, из него вычтут 2. Число получится чётное, из него снова вычтут 2, и так далее. Тогда всего вычитаний было $1 + \frac{342}{2} = 172$. □

Задача 9.3. В пруду водятся три вида рыб: окуни, щуки и карпы. Когда у рыбака спросили, сколько он сегодня поймал, он ответил:

«Окуней в 3 раза больше, чем остальной рыбы»;

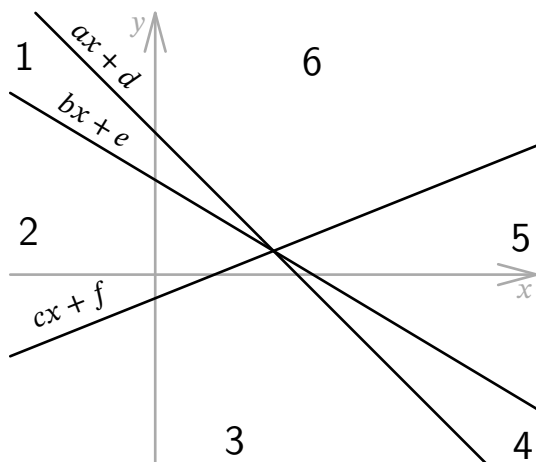
«Щук в 9 раз меньше, чем остальной рыбы».

Сколько процентов от всего улова составляют карпы?

Ответ: 15.

Решение. Поскольку окуней в 3 раза больше остальной рыбы, то они составляют $\frac{3}{4}$ всего улова, т. е. 75%. Поскольку щук в 9 раз меньше остальной рыбы, то они составляют $\frac{1}{10}$ всего улова, т. е. 10%. Тогда карпы составляют $100\% - 75\% - 10\% = 15\%$. □

Задача 9.4. Графики трёх линейных функций $y = ax + d$, $y = bx + e$ и $y = cx + f$, схематично изображённые на рисунке, разбивают плоскость на 6 областей, пронумерованных цифрами от 1 до 6. Какие области пересечёт график функции $y = \left(\frac{a+b+c}{3}\right)x + \left(\frac{d+e+f}{3}\right)$? (Прямая пересекает область, если проходит через хотя бы одну её точку, не лежащую на границе области.)



Ответ: 2, 5.

Решение. Пусть (x_0, y_0) — координаты точки пересечения трёх прямых в условии. Сами функции, графиками которых являются эти прямые, обозначим за

$$k(x) = ax + d, \quad l(x) = bx + e, \quad m(x) = cx + f,$$

а функцию, графиком которой является исследуемая прямая, за

$$n(x) = \left(\frac{a + b + c}{3} \right) x + \left(\frac{d + e + f}{3} \right).$$

Заметим, что

$$n(x) = \frac{k(x) + l(x) + m(x)}{3}.$$

Условие того, что три данные прямые проходят через точку (x_0, y_0) , отвечает равенствам $k(x_0) = l(x_0) = m(x_0) = y_0$; а так как $n(x_0) = \frac{1}{3}(k(x_0) + l(x_0) + m(x_0)) = y_0$, то график $n(x)$ также проходит через эту точку.

Чтобы определить, какие области пересекает прямая $y = n(x)$, осталось понять, например, где она пересекает ось ординат (рис. 9). Ордината $n(0)$ точки пересечения равна $\frac{1}{3}(d + e + f)$. Это среднее арифметическое чисел d , e и f , то есть $n(0)$ находится между наибольшим из этих трёх чисел (это d по рисунку) и наименьшим (это f).

Кроме того, из рисунка ясно, что $d - e < e - f$, то есть $d + f < 2e$, откуда мы получаем $\frac{1}{3}(d + e + f) < \frac{1}{3} \cdot 3e = e$. Значит, $n(0)$ меньше e , и пересечение прямой $y = n(x)$ с осью ординат, таким образом, попадает в область 2.

Рассматриваемая прямая разбивается точкой (x_0, y_0) на два луча. Один из них, как мы установили, пересекает область 2, а значит, полностью в ней содержится; второй луч тогда содержится в противоположной области, под номером 5. Другие области прямая не пересекает. $\square$

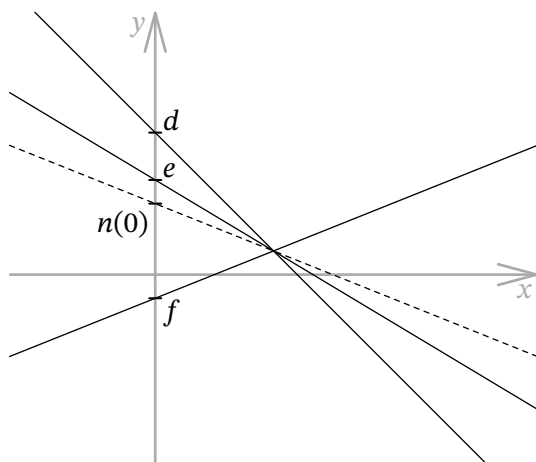


Рис. 9: к решению задачи 9.4

Задача 9.5. Таня написала на доске несколько натуральных чисел. Оказалось, что среди них ровно одно делится на 10, ровно два делятся на 9, ровно три делятся на 8, ..., ровно восемь делятся на 3 и ровно девять делятся на 2. Какое наименьшее количество чисел могло быть на доске?

Ответ: 14.

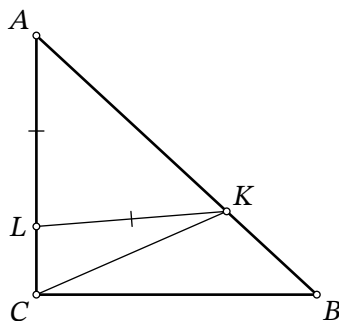
Решение. По условию среди данных чисел одно делится на 10, шесть делятся на 5, девять делятся на 2. Значит, среди делящихся на 5 чисел есть пять, не кратных 10, т. е. нечётных. Также есть девять чётных чисел, поэтому всего чисел не менее $9 + 5 = 14$.

Приведём теперь пример на 14 чисел. Несложно убедиться, что числа

$$2^3 \cdot 3^2 \cdot 7, \quad 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7, \quad 2^3 \cdot 3 \cdot 7, \quad 2^2 \cdot 3 \cdot 7, \quad 2^2 \cdot 3 \cdot 7, \\ 3 \cdot 5, \quad 3 \cdot 5, \quad 3 \cdot 5, \quad 2 \cdot 5, \quad 5, \quad 5, \quad 2^2, \quad 2^2, \quad 2$$

подходят под условие. □

Задача 9.6. В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузе AB отметили точку K так, что $AK = AC$. На катете AC отметили точку L так, что $LA = LK$. Найдите длину отрезка BK , если известно, что $AC = 19$ и $AL = 13$.



Ответ: 7.

Решение. Отметим на луче AL точку T такую, что $AL = LT$. В треугольнике AKT медиана, проведённая к стороне AT , равна её половине, поэтому этот треугольник прямоугольный с $\angle AKT = 90^\circ$ (рис. 10).

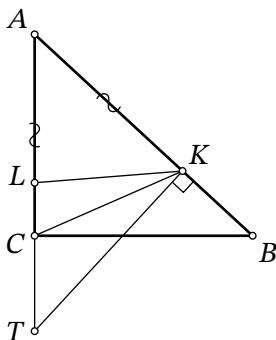


Рис. 10: к решению задачи 9.6

Заметим, что прямоугольные треугольники ABC и ATK равны по катету $AC = AK$ и прилежащему общему острому углу A . Тогда равны и гипотенузы $AB = AT$, т. е. $AK + KB = 2AL$, откуда $KB = 2AL - AK = 2AL - AC = 2 \cdot 13 - 19 = 7$. $\square$

Задача 9.7. Перед матчем по квиддичу Рон пошёл в Хогсмид в лавку «Магические вещи, магические цены», чтобы купить предметы, приносящие удачу. В лавке продавалось 3 магических предмета данного типа: подковы, четырёхлистные клевера и кроличьи лапки. Подкова стоит 2 сикля, каждая лапка будет стоит 1 сикль плюс количество купленных подков, а каждый клевер будет стоит 3 сикля плюс количество купленных кроличьих лапок. Рон решил купить набор «Стопроцентная удача» из 14 предметов.

На обратном пути в Хогвартс Рон понял, что это самый дорогой набор из 14 предметов. Сколько сиклей стоил данный набор?

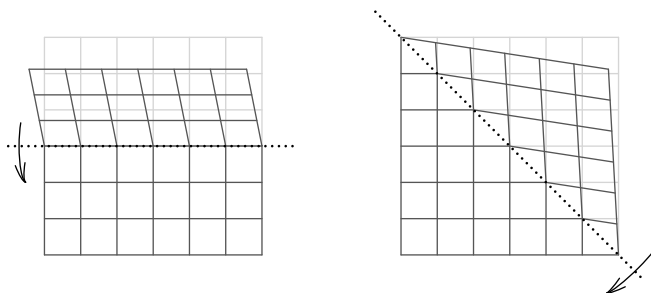
Ответ: 78.

Решение. Предположим, в наборе x подков, y клеверов и z лапок, причём $x + y + z = 14$. Тогда такой набор стоит

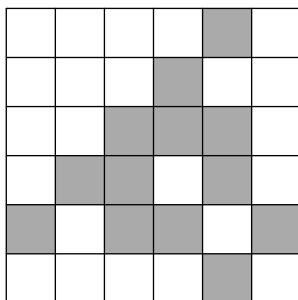
$$\begin{aligned} 2x + (3 + z)y + (1 + x)z &= 2x + 3y + yz + z + xz \leq \\ &\leq 3x + 3y + 3z - 2z + z(x + y) = 42 + z(x + y - 2) = \\ &= 42 + z(12 - z) = 78 - (6 - z)^2 \leq 78. \end{aligned}$$

Докажем, что набор может стоять ровно 78 сиклей — отсюда последует, что ровно такую сумму Рон и потратил. Действительно, при $x = 0$, $y = 8$, $z = 6$ цена набора составляет $0 + 9 \cdot 8 + 6 \cdot 1 = 78$ сиклей. $\square$

Задача 9.8. На бумажном квадрате 6×6 Дима закрашивает часть клеток. Потом Алёна берёт его квадрат и перегибает квадрат по центральной линии, затем разгибает его и перегибает второй раз по диагонали. Клетки, которые при перегибании совмещались с закрашенными, тоже закрашивались.



Сколько у Димы есть способов закрасить некоторые клетки так, чтобы после действий Алёны получился квадрат, показанный на рисунке?



Ответ: 81.

Решение. Будет называть линию первого сгиба просто *горизонталь*, а линию второго сгиба — *диагональ*.

				x	
			x		
			a	x	
	a	x			
a		a			a
				x	

Рис. 11: к решению задачи 9.8

Попробуем восстановить *промежуточное* состояние квадрата — какие клетки были закрашены после первого перегибания, но до второго. Понятно, что в этот момент картинка была симметрична относительно горизонтали.

Сначала рассмотрим те закрашенные клетки, у которых нету симметричной им относительно горизонтали. Такие клетки не могли быть закрашены в промежуточный момент. Отметим их буквами «а», а закрашку уберем, как на рис. 11.

Далее рассмотрим клетки, симметричные клеткам «а» относительно диагонали. Отметим такие клетки буквами «х» — они в промежуточный момент точно были закрашены, ведь иначе клетки «а» бы не закрались после второго перегибания.

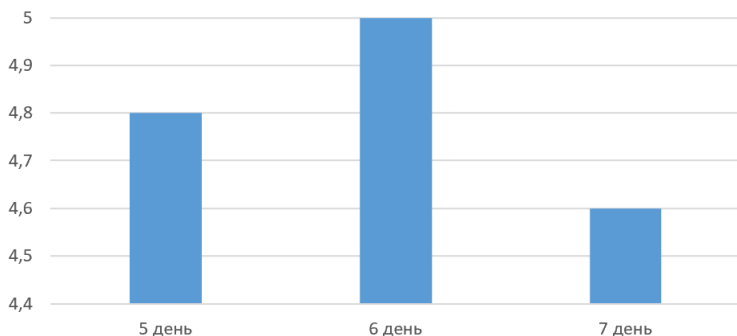
Заметим, что клетки, симметричные клеткам «х» относительно горизонтали, тоже были закрашены в промежуточный момент. Больше закрашенных клеток и нет, так что мы определили промежуточную картинку однозначно.

Теперь надо понять, каким образом такая промежуточная картинка могла получиться из изначальной в результате первого перегибания. Закрашенные клетки на ней разбиваются на четыре пары симметричных относительно горизонтали; в каждой паре изначально должно быть не менее одной закрашенной. Это три варианта (верхняя, нижняя, или обе в паре); для разных пар этот выбор независим, поэтому всего получается $3^4 = 81$ вариант. □

10 класс

Задача 10.1. Рейтинг успешности выполнения домашнего задания — среднее арифметическое последних пяти оценок, полученных за домашнее задание.

В течение первых семи учебных дней Маша каждый день получала одну оценку за домашнее задание (по пятибалльной шкале). Начиная с пятого дня сразу после получения очередной оценки Маша вычисляла свой рейтинг успешности выполнения домашнего задания. Получились следующие результаты (см. рисунок).



- Какую оценку она получила в первый день?
- Какую оценку она получила в шестой день?
- Какую оценку она получила в седьмой день?

Ответ: 4, 5, 3.

Решение. В шестой день средний балл равен 5, поэтому оценки в дни со второго по шестой — все пятёрки. Пусть a — оценка в первый день, b — оценка в седьмой день. Тогда по условию $\frac{a+5+5+5+5}{5} = 4,8$, откуда $a = 4$; а также $\frac{5+5+5+5+b}{5} = 4,6$, откуда $b = 3$. $\square$

Задача 10.2. В течение пяти дней Гриша решал задачи — всего он решил 31 задачу. Известно, что в каждый следующий день Гриша решал задач больше, чем в предыдущий, а в пятый день он решил в три раза больше задач, чем в первый. Сколько задач он решил в четвёртый день?

Ответ: 8.

Решение. Предположим, в первый день Гриша решил не больше 2 задач, тогда в пятый день он решил не больше 6 задач. Тогда в четвёртый день он решил не больше 5 задач, в третий — не больше 4 задач, во второй — не больше 3 задач. Тогда суммарно задач решено не более $2 + 3 + 4 + 5 + 6 < 31$ — противоречие.

Предположим, в первый день Гриша решил не меньше 4 задач, тогда в пятый день он решил не меньше 12 задач. Во второй день он в этом случае решил не меньше 5 задач,

в третий — не меньше 6 задач, в четвёртый — не меньше 7 задач. Тогда суммарно задач решено не менее $4 + 5 + 6 + 7 + 12 > 31$ — противоречие.

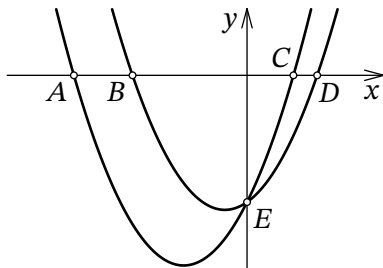
Значит, в первый день Гриша решил 3 задачи, а в пятый — 9 задач. Если в четвёртый день Гриша решил не больше 7 задач, то в третий день — не больше 6 задач, а во второй — не больше 5 задач. Тогда суммарно задач решено не больше $3 + 5 + 6 + 7 + 9 < 31$ — противоречие. Значит, в четвёртый день Гриша решил больше 7 и меньше 9 задач, т. е. 8. $\square$

Задача 10.3. В клетчатом прямоугольнике отметили несколько клеток. Оказалось, что количество отмеченных клеток в любой строке в 3,5 раза больше, чем количество отмеченных в любом столбце. Найдите периметр прямоугольника, если его площадь равна 126.

Ответ: 54.

Решение. Пусть в доске a строк и b столбцов. Из условия очевидно следует, что во всех столбцах поровну отмеченных клеток, по n в каждом. Тогда во всех строках по $3,5n$ отмеченных клеток. Просуммировав общее количество отмеченных клеток в таблице по строкам и по столбцам, получим $nb = 3,5na$, откуда $b = 3,5a$ (из условия следует, что $n \neq 0$). Площадь прямоугольника $126 = ab = 3,5a^2$, откуда $a^2 = 36$ и $a = 6$. Тогда периметр прямоугольника равен $2a + 2b = 2a + 7a = 9a = 54$. $\square$

Задача 10.4. На чертеже схематично изображены графики квадратных трёхчленов $y = x^2 + 33x + a$ и $y = x^2 + 6x + a$. График первого из них проходит через точки A, C и E , график второго — через точки B, D и E . Найдите длину отрезка AB , если $CD = 11$.



Ответ: 16.

Решение. Пусть точки A, B, C, D имеют абсциссы p, q, r, s соответственно. Из рисунка ясно, что $p < q < r < s$. По теореме Виета для каждого из трёхчленов имеем $p + r = -33$, $q + s = -6$. По условию также имеем $s - r = 11$. Тогда $AB = q - p = (q + s) - (p + r) - (s - r) = -6 + 33 - 11 = 16$. $\square$

Задача 10.5. На праздник в селение приехали туристы. За круглым столом собралось 45 человек: несколько туристов и несколько местных жителей. Каждый из них сказал, что его соседи — местный житель и турист. Оказалось, что правду сказали все местные

жители, кроме двух человек, а все остальные, сидящие за столом, соврали. Сколько туристов сидело за круглым столом?

Ответ: 15.

Решение. Из условия следует, что все туристы соврали, т. е. у каждого туриста соседями являются либо два местных жителя, либо два туриста. Если где-то за столом найдутся два соседа-туриста, то, идя по часовой стрелке, получаем, что правый сосед правого туриста тоже турист, его правый сосед — тоже турист, и так далее, т. е. все за столом — туристы, что невозможно по условию. Значит, никакие два туриста не сидят рядом.

Назовём *группой* наибольшее по количеству множество подряд сидящих местных жителей. Если группа состоит ровно из одного местного жителя, то оба его соседа — туристы, и он лжёт. Если группа состоит ровно из двух местных жителей, то они оба сказали правду. Если группа состоит хотя бы из трёх местных жителей, то среди них правду сказали только крайние, а все промежуточные соврали. Отсюда, в частности, следует, что в каждой группе не больше 4 местных жителей.

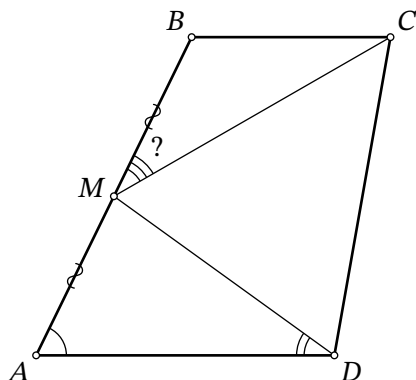
Возможны несколько случаев, в которых ровно двое местных жителей соврали.

Случай 1. Существует группа из 4 местных жителей. Тогда все остальные группы обязаны состоять из 2 местных жителей. Тогда, убрав из-за стола двух совравших местных жителей, все оставшиеся люди быются на тройки ММТ (два местных жителя и турист); но $45 - 2$ на 3 не делится. Противоречие.

Случай 2. Существует группа из 3 местных жителей (в которой один человек соврал). Если существует другая группа из 3 местных жителей, то, как и в предыдущем случае, легко видеть, что без совравших двух местных жителей все люди быются на тройки ММТ, но $45 - 2$ на 3 не делится. Противоречие. Значит, другой совравший местный житель должен находиться в группе из 1 местного жителя. Мысленно пересадив человека из группы из 3 местных жителей в группу из 1 местного жителя, получим, что все люди быются на тройки ММТ, поэтому всего туристов $\frac{45}{3} = 15$.

Случай 3. Если же все группы состоят не более чем из двух местных жителей, то существуют группы из одного местного жителя (иначе будет менее 2 совравших местных жителей), и таких групп ровно две. Тогда, убрав из-за стола этих двух совравших местных жителей и их соседей-туристов по часовой стрелке, получим, что все оставшиеся люди быются на тройки ММТ, но $45 - 4$ на 3 не делится. Противоречие. $\square$

Задача 10.6. На боковой стороне AB трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) отмечена середина M . Известно, что $AD + BC = CD$, $\angle BAD = 56^\circ$, $\angle MDA = 47^\circ$. Сколько градусов составляет угол BMC ?



Ответ: 13.

Решение. Пусть прямая MC пересекает прямую AD в точке K (рис. 12). Тогда треугольники BMC и AMK равны по второму признаку ($\angle CBM = \angle MAK$ и $\angle BCM = \angle AKM$ как накрест лежащие, а также $BM = AM$), поэтому $BC = AK$ и $CM = KM$.

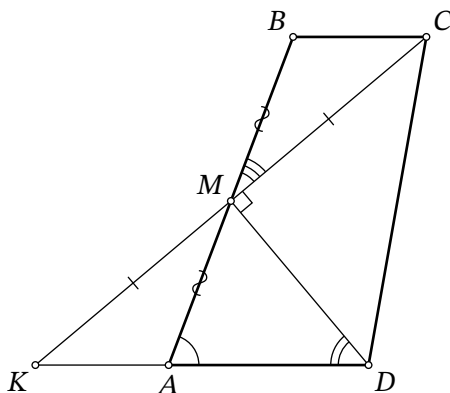


Рис. 12: к решению задачи 10.6

Заметим, что $CD = BC + AD = AK + AD = KD$, поэтому треугольник CKD равнобедренный. Отрезок DM — его медиана, проведённая к основанию, поэтому $DM \perp CM$. Тогда

$$\begin{aligned} \angle CMB &= 90^\circ - \angle AMD = 90^\circ - (180^\circ - \angle BAD - \angle MDA) = \\ &= \angle BAD + \angle MDA - 90^\circ = 13^\circ. \end{aligned}$$

□

Задача 10.7. Про натуральные числа a и b известно, что

$$3(a + b) = \text{НОД}(a, b) + \text{НОК}(a, b).$$

Какое наименьшее значение может принимать ab ?

Ответ: 35.

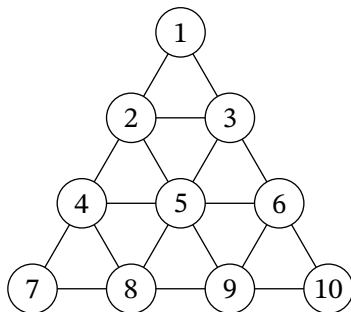
Решение. Пусть d — НОД чисел a и b . Обозначим $a_1 = \frac{a}{d}$ и $b_1 = \frac{b}{d}$. Тогда a_1 и b_1 — взаимно простые натуральные числа; кроме того, $\text{НОК}(da_1, db_1) = da_1b_1$. Мы получаем равенство $3d(a_1 + b_1) = d + da_1b_1$, откуда

$$3a_1 + 3b_1 = a_1b_1 + 1$$

или $(a_1 - 3)(b_1 - 3) = 8$. Обе скобки не меньше -2 , поэтому они обе обязаны быть положительными, и равны либо 1 и 8, либо 2 и 4. В первом случае получаем, что a_1 и b_1 равны 4 и 11 (либо 11 и 4), тогда $ab = d^2a_1b_1 \geq 44$. Во втором случае получаем, что a_1 и b_1 равны 5 и 7 (либо 7 и 5), тогда $ab = d^2a_1b_1 \geq 35$.

Осталось заметить, что значение $ab = 35$ возможно при $a = 5$ и $b = 7$. □

Задача 10.8. Числа от 1 до 10 расставлены в узлах треугольной решётки, как показано на рисунке. Назовём два числа *близкими*, если они находятся в соседних узлах решетки. Сколько существует расстановок чисел таких, что любые два числа, близких на данном рисунке, в новой расстановке перестают быть близкими?



Ответ: 18.

Решение. Назовём число, стоящее в центре расстановки, *центральной*; числа в трёх углах — *угловыми*, остальные шесть чисел — *средними*. Например, в изначальной расстановке число 5 — центральное, числа 1, 7, 10 — угловые, а остальные шесть чисел — средние. У центрального числа 6 соседей, у средних — по 4, у угловых — по 3.

Заметим, что число 5 в новой расстановке не может быть близким с 2, 3, 4, 6, 8, 9, поэтому оно может быть близким только с несколькими из чисел 1, 7, 10. Значит, оно обязано быть угловым (иначе у него окажется хотя бы 4 соседа). Выбрать угол для числа 5 можно 3 способами; не умаляя общности, оно стоит вверху треугольника. Числа 1, 7 и 10 равноправны, поэтому левого нижнего соседа числа 5 можно выбрать 3 способами, тогда правого нижнего соседа можно выбрать 2 способами. Не умаляя общности, левый нижний

сосед — число 1, а правый нижний — число 7. Докажем, что оставшиеся числа в расстановке восстанавливаются однозначно, тогда ответом в задаче окажется число $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$.

Заметим, что число 10 обязано быть центральным (иначе им станет одно из средних чисел, но тогда бывшие 4 его соседа не могут уместиться в трёх углах, и хотя бы один из них будет соседом с центральным числом). Числа 6 и 9 были близкими с числом 10, поэтому они обязаны оказаться угловыми (это единственные два пока незанятых места, не близкие с центральным числом 10).

Предположим, что 6 стоит в левом углу, а 9 — в правом (рис. 13, слева). Числа 4, 7, 8 были изначально попарно близки, поэтому в новой расстановке они попарно не близки. Значит, числа 4 и 8 близки с новым правым соседом числа 6. Но если этот сосед равен 2, то он близок с 4, а если равен 3, то он близок с 6. Противоречие.

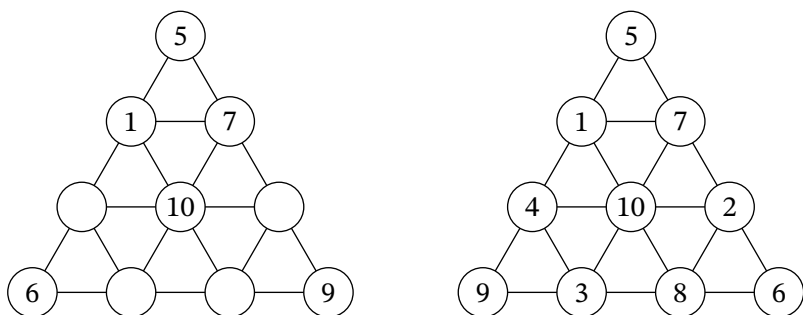


Рис. 13: к решению задачи 10.8

Пусть тогда 9 стоит в левом углу, а 6 — в правом (рис. 13, справа). Числа 4, 7, 8 были изначально попарно близки, поэтому в новой расстановке они попарно не близки. Значит, числа 4 и 8 близки с новым правым соседом числа 9. Поскольку 2 и 4 были близки, то этот сосед равен 3. Тогда правый сосед числа 10 равен 2. Поскольку 8 и 9 были близки, то 8 должен быть новым правым соседом числа 3, а 4 — левым соседом числа 10. Несложно проверить, что полученная расстановка удовлетворяет всем условиям. $\square$

11 класс

Задача 11.1. В классе стоят несколько парт, за каждой из которых могут сидеть не более двух человек. В понедельник на уроки пришли 13 человек из 11 «А» класса, при этом ровно 9 парт остались незанятыми. Во вторник на уроки пришли уже 10 человек, при этом ровно 6 парт остались незанятыми. Сколько парт в классе?

Ответ: 16.

Решение. 13 человек занимают хотя бы 7 парт (иначе, если бы парт было не больше 6, то человек было бы не больше $6 \cdot 2 = 12$), поэтому парт в классе не меньше $9 + 7 = 16$. С другой стороны, 10 человек занимают не более 10 парт, поэтому парт в классе не больше $10 + 6 = 16$. Значит, единственный возможный вариант — это 16 парт. $\square$

Задача 11.2. Действительное число α таково, что $\sin \alpha + \cos \alpha = -0,8$. Найдите значение выражения $100 \sin 2\alpha$.

Ответ: -36 .

Решение. Заметим, что

$$0,64 = (-0,8)^2 = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1 + \sin 2\alpha.$$

Значит, $\sin 2\alpha = -0,36$, а $100 \sin 2\alpha = -36$. $\square$

Задача 11.3. На доске было написано число 11753812252. Петя выбрал некоторую цифру и знак арифметической операции и вместо каждой выбранной цифры написал выбранный знак. Затем он сделал так ещё раз, но выбрав другие цифру и знак арифметической операции (знаки арифметических операций не могут стоять подряд). После его действий выражение на доске стало равно 100. Какие цифры на какие арифметические операции заменял Петя? Достаточно привести один пример.

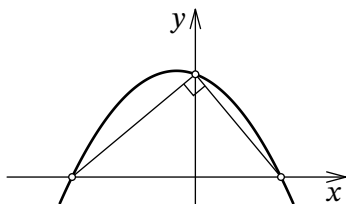
Ответ: Цифру 5 на знак деления, цифру 8 на знак сложения.

Решение. Так как знаки арифметической операции не могут стоять подряд, то они заменяли не 1 и не 2, т. е. они могли заменять цифры 7, 5, 3, 8.

Если 5 не заменена, то могли быть заменены только цифра 7, а также 3 или 8. Тогда могли получиться равенства $11 \star 5 \star 812252 = 100$ или $11 \star 53 \star 12252 = 100$. Несложным перебором можно показать, что решений в этом случае нет.

Если заменена 5, то не могут быть заменены 7 и 3, тогда заменена и 8. В этом случае получается равенство $117 \star 3 \star 122 \star 2 = 100$. Здесь подбирается решение $117 : 3 + 122 : 2 = 100$ (несложным перебором можно показать, что других решений в этом случае нет). $\square$

Задача 11.4. График квадратного трёхчлена $y = ax^2 + bx + \frac{1}{6}$ пересекает оси координат в трёх точках, являющихся вершинами прямоугольного треугольника. Найдите a .



Ответ: -6 .

Решение. Поскольку ветви параболы направлены вниз, имеем $a < 0$.

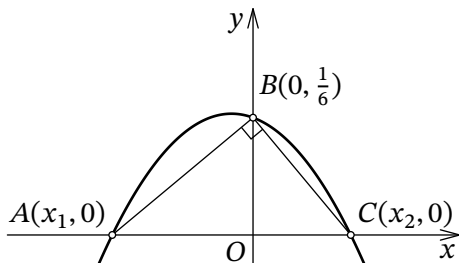


Рис. 14: к решению задачи 11.4

Обозначим через B точку пересечения графика с осью Oy , через A и C — точки пересечения с осью Ox (A левее C), через O — начало координат (рис. 14).

Ордината точки B равна значению функции при $x = 0$, т. е. $\frac{1}{6}$. Пусть x_1 и x_2 — корни данного трёхчлена ($x_1 < 0 < x_2$), т. е. координаты точки A имеют вид $(x_1; 0)$, C — $(x_2; 0)$, B — $(0; \frac{1}{6})$. Поскольку BO — высота прямоугольного треугольника ABC , опущенная на гипотенузу, то её квадрат равен произведению проекций катетов на гипотенузу. Отсюда получаем равенство $(\frac{1}{6})^2 = |x_1| \cdot |x_2| = |x_1 \cdot x_2| = |\frac{1/6}{a}|$ (последнее равенство верно по теореме Виета), откуда $|a| = 6$ и $a = -6$. $\square$

Задача 11.5. На доску записали несколько последовательных натуральных чисел, начиная с 5. Одно из чисел стёрли. Оказалось, что среднее арифметическое оставшихся равно $\frac{41}{3}$. Какое число стёрли?

Ответ: 20.

Решение. Пусть n — наибольшее число среди исходных, $5 \leq a \leq n$ — стёртое число. По условию $\frac{41}{3} = \frac{(5 + 6 + 7 + \dots + n) - a}{n - 5}$. Тогда $\frac{41(n - 5)}{3}$ является целым числом, поэтому $n - 5$ должно делиться на 3. Значит, n даёт остаток 2 при делении на 3.

Также по формуле суммы арифметической прогрессии имеем

$$\frac{41}{3} = \frac{(5 + 6 + 7 + \dots + n) - a}{n - 5} = \frac{\frac{(n + 5)(n - 4)}{2} - a}{n - 5},$$

откуда $a = \frac{(n+5)(n-4)}{2} - \frac{41(n-5)}{3} = \frac{1}{2}n^2 - \frac{79}{6}n + \frac{175}{3} = a(n)$. При $n = 23$ получится $a = 20$, что подходит под условие.

При $n \leq 20$ получится $a(n) < 0$ (так как $a(n) + 5 = \frac{1}{6}(3n - 19)(n - 20) \leq 0$), что невозможно.

При $n \geq 26$ получится $a(n) > n$ (так как $a(n) - n = \frac{1}{6}(n - 5)(3n - 70) > 0$), что невозможно. $\square$

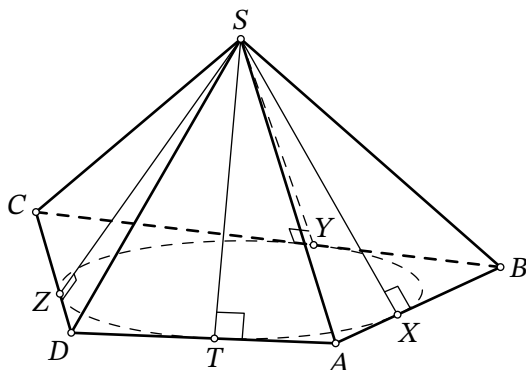
Другое решение. Заметим, что среднее арифметическое ряда из последовательных натуральных чисел — это среднее арифметическое его крайних элементов. Если мы в таком ряду сотрём первое число, то среднее увеличится на 0,5; а если сотрём последнее, то уменьшится на 0,5. При стирании же произвольного числа из ряда сумма оставшихся чисел будет заключена между суммами рядов, получающихся в двух «крайних» случаях; поэтому и среднее тоже будет заключено между «крайними» средними; таким образом, при стирании одного числа среднее изменится не более чем на 0,5.

Получается, что среднее ряда до стирания числа было в промежутке $[\frac{41}{3} - \frac{1}{2}; \frac{41}{3} + \frac{1}{2}]$, то есть $[13\frac{1}{6}; 14\frac{1}{6}]$. Так как среднее ряда последовательных чисел — это число полуцелое, то оно могло быть равно либо 13,5, либо 14.

Первое число в ряду было равно 5, а так как $13,5 = \frac{5+22}{2}$ и $14 = \frac{5+23}{2}$, последнее число было равно либо 22, либо 23; всего чисел, соответственно, изначально было либо 18, либо 19. Но после стирания не могло получиться 17 чисел, так как делителю 3 в знаменателе у среднего арифметического $\frac{41}{3}$ было бы неоткуда взяться. Следовательно, изначально было 19 чисел, а после вычёркивания осталось 18, причём их сумма равна $\frac{41}{3} \cdot 18 = 246$.

Сумма чисел от 5 до 23 равна $\frac{5+23}{2} \cdot 19 = 266$. Чтобы осталась сумма 246, нужно вычеркнуть число 20. $\square$

Задача 11.6. Объём пирамиды $SABCD$ равен 60, а периметр её основания $ABCD$ равен 30. В треугольниках SAB , SBC , SCD и SDA проведены высоты SX , SY , SZ и ST соответственно. Оказалось, что точки X , Y , Z , T лежат на одной окружности радиуса 3, которая касается всех сторон четырёхугольника $ABCD$. Найдите сумму площадей всех пяти граней пирамиды $SABCD$.



Ответ: 120.

Решение. Пусть ω — окружность, проходящая через точки X, Y, Z, T и касающаяся сторон основания пирамиды, точка O — её центр, $r = 3$ — её радиус.

Поскольку четырёхугольник $ABCD$ является описанным с полупериметром $p = \frac{30}{2} = 15$, то его площадь вычисляется по формуле $S_{ABCD} = pr = 15 \cdot 3 = 45$. Далее, поскольку объём пирамиды вычисляется по формуле $V = \frac{1}{3}S_{ABCD}h$, где h — высота пирамиды, то $h = \frac{3V}{S_{ABCD}} = 4$.

Заметим, что $OX \perp AB$, так как это радиус и касательная; кроме того, $SX \perp AB$. По теореме о трёх перпендикулярах получаем, что проекция точки S на плоскость основания попадает на прямую OX . Аналогично заключаем, что она попадает и на прямые, содержащие радиусы OY, OZ, OT . Так как эти прямые пересекаются только в точке O , получаем, что $SO \perp ABCD$ (рис. 15).

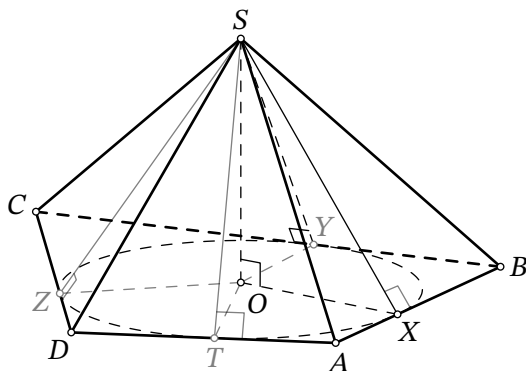


Рис. 15: к решению задачи 11.6

В частности, треугольник SOX прямоугольный, и $SX = \sqrt{SO^2 + OX^2} = \sqrt{h^2 + r^2} = 5$ по теореме Пифагора; аналогично получаем $SY = SZ = ST = 5$.

Следовательно, площадь полной поверхности пирамиды равна

$$\begin{aligned} S &= S_{ABS} + S_{BCS} + S_{CDS} + S_{DAS} + S_{ABCD} = \\ &= \frac{SX \cdot AB}{2} + \frac{SY \cdot BC}{2} + \frac{SZ \cdot CD}{2} + \frac{ST \cdot AD}{2} + 45 = \\ &= \frac{5(AB + BC + CD + DA)}{2} + 45 = \frac{5 \cdot 30}{2} + 45 = 120. \end{aligned} \quad \square$$

Задача 11.7. Петя раскрасил клетки доски 10 × 10 в несколько цветов так, что в любой строке, как и в любом столбце, использовано не более трёх цветов. Какое наибольшее количество цветов мог использовать Петя?

Ответ: 21.

Решение. Сначала приведём пример с 21 цветом. Расположим 10 разных цветов на диагонали, и ещё 10 разных цветов на клетках непосредственно над диагональю (при этом считаем, что таблица «заиклиивается»); остальные клетки зальём ещё одним цветом (рис. 16).

								20	19
							18	17	
						16	15		
					14	13			
				12	11				
			10	9					
		8	7						
	6	5							
4	3								
1									2

Рис. 16: к решению задачи 11.7; пустые клетки отвечают цвету без номера

Докажем теперь, что цветов не может быть более 21.

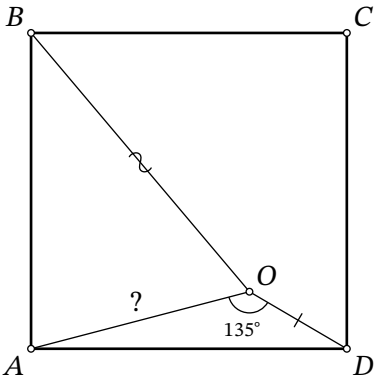
Предположим, что в каждой строке использовано не более двух цветов. Тогда всего в таблице использовано не более $2 \cdot 10 < 21$ цветов.

Теперь допустим, что в некоторой строке использовано ровно 3 цвета; назовём их *первичными* цветами.

Если при этом в каждой из остальных строк не более двух не первичных цветов, то всего цветов не более $3 + 2 \cdot 9 = 21$.

Пусть тогда найдётся строка, в которой три не первичных цвета; назовём их *вторичными* цветами. В этом случае в каждом столбце уже есть первичный и вторичный цвет, поэтому в нём не более одного цвета, отличающегося от первичных и вторичных. Тогда во всей таблице цветов не более $3 + 3 + 10 = 16$. □

Задача 11.8. Внутри квадрата $ABCD$ отмечена точка O . Известно, что $\angle AOD = 135^\circ$, $BO = 12$, $DO = 4$. Найдите AO .



Ответ: 8.

Решение. Построим равнобедренный прямоугольный треугольник OAM ($OA = AM$) так, чтобы сторона OM лежала на продолжении OD (рис. 17). Углы DAO и BAM равны, так как оба дополняют угол OAB до 90° . Отсюда следует, что треугольники DAO и BAM равны по углу и двум сторонам. (Проще говоря, повернём треугольник DAO вокруг точки A на 90° и получим BAM .)

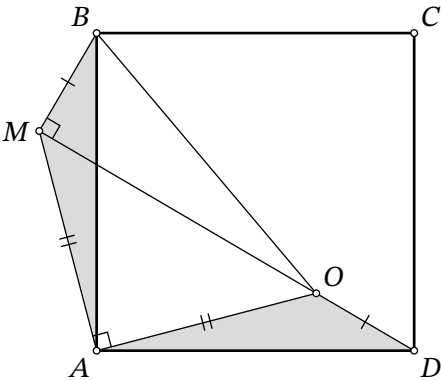


Рис. 17: к решению задачи 11.8

Заметим, что угол BMO прямой, так как $\angle BMA = 135^\circ$ из равенства треугольников, а угол

$\angle OMA$ равен 45° по построению (альтернативно, можно просто отметить, что прямые OD и BM перпендикулярны, так как упомянутый выше поворот на 90° переводит одну в другую). Мы можем вычислить OM по теореме Пифагора:

$$OM^2 = BO^2 - BM^2 = BO^2 - OD^2 = 4^2 \cdot 8.$$

Осталось заметить, что $OM = AO \cdot \sqrt{2}$ по свойству равнобедренного прямоугольного треугольника, откуда $AO = 8$. □