Максимальное количество баллов за олимпиаду — 30

Задание 1. Вариант 1. На картодроме проходит квалификация. Максим управляет картом № 1, а Даниил — картом № 2. Длина замкнутой трассы равна $L = 900$ м; линия финиша круга совпадает с линией старта. Максим стартует первым. Его путевая скорость равна $v_1 = 12$ м/с. Через $\tau = 15$ с после него с той же линии старта в том же направлении выезжает Даниил. Его путевая скорость равна $v_2 = 20$ м/с.

а) За какое время Максим на карте № 1 проходит один круг? Ответ выразите в секундах, округлите до целых.

Ответ: 75

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 1 балл

б) На какое расстояние от линии старта успел отъехать Максим к моменту старта Даниила? Ответ выразите в метрах, округлите до целых.

Ответ: 180

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 1 балл

в) Через какое время после своего старта Даниил догонит Максима? Ответ выразите в секундах, округлите до десятых.

Ответ: 22.5

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 2 балла

г) Через какое время после первой встречи Даниил снова догонит Максима? Ответ выразите в секундах, округлите до десятых.

Ответ: 112.5

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 3 балла

д) Сколько раз Даниил успеет догнать Максима до того момента, когда Максим завершит третий круг?

Ответ: 2

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 3 балла

Максимальный балл за задание — 10

Решение.

а) Время прохождения круга Максимом равно

$$t_1 = \frac{L}{v_1} = \frac{900}{12} = 75 \text{ с}.$$

б) За первые 15 с Максим проехал

$$s_0 = v_1\tau = 12 \cdot 15 = 180 \text{ м}.$$

в) Когда стартует Даниил, Максим уже будет опережать его на 180 м. Расстояние между ними уменьшается со скоростью

$$v_2 - v_1 = 20 - 12 = 8 \text{ м/с},$$

поэтому Даниил догонит Максима через

$$\frac{180}{8} = 22.5 \text{ с}$$

после своего старта.

г) Сразу после встречи оба участника находятся в одной точке. Чтобы догнать Максима снова, Даниил должен получить преимущество в один полный круг. При относительной скорости 8 м/с на это потребуется

$$\frac{900}{8} = 112.5 \text{ с}.$$

д) Максим завершит третий круг через $3 \cdot 75 = 225$ с после своего старта. К этому моменту Даниил будет двигаться $225 - 15 = 210$ с. Первая встреча происходит через 22.5 с после старта Даниила, а следующие встречи — через каждые 112.5 с. Значит, первая и вторая встречи произойдут через 22.5 с и 135 с соответственно, а третья — только через 247.5 с. До финиша третьего круга Максима Даниил успеет догнать его 2 раза.

Матрица параметров и ответов к вариантам задания 1.

№ варианта	L, м	v_1, м/с	τ, с	v_2, м/с	Ответ (пункт а)	Ответ (пункт б)	Ответ (пункт в)	Ответ (пункт г)	Ответ (пункт д)
1	900	12	15	20	75	180	22.5	112.5	2
2	800	10	12	18	80	120	15.0	100.0	3
3	840	12	10	19	70	120	17.1	120.0	2
4	960	12	20	20	80	240	30.0	120.0	2
5	1000	10	15	15	100	150	30.0	200.0	2
6	720	12	12	18	60	144	24.0	120.0	2
7	1080	12	18	21	90	216	24.0	120.0	2
8	990	11	15	20	90	165	18.3	110.0	3
9	960	16	12	24	60	192	24.0	120.0	2
10	840	14	10	21	60	140	20.0	120.0	2
11	1050	15	14	22	70	210	30.0	150.0	2
12	1200	15	20	25	80	300	30.0	120.0	2
13	1080	18	10	24	60	180	30.0	180.0	1
14	900	15	12	25	60	180	18.0	90.0	2
15	800	16	10	20	50	160	40.0	200.0	1
16	1000	20	10	25	50	200	40.0	200.0	1
17	960	12	8	16	80	96	24.0	240.0	1
18	1008	14	16	22	72	224	28.0	126.0	2
19	880	11	20	19	80	220	27.5	110.0	2
20	936	13	12	21	72	156	19.5	117.0	2

Задание 2. Вариант 1. После квалификационных заездов Максим и Даниил устали и решили выпить кваса. Рядом с картодромом они увидели киоск с инновационной бочкой. Квас из неё разливается в бутылки объёмом $V = 0.5$ л. Скорость розлива постоянна и равна $q = 0.25$ л/с. Один автомат для крышек закрывает одну наполненную бутылку за $\tau = 3$ с. В первые $t_1 = 60$ с работает один автомат для крышек, затем включают второй такой же автомат. Через $t_2 = 30$ с после этого первый автомат останавливает работу для предотвращения перегрева. Охлаждение продолжается $t_3 = 60$ с, после чего он снова начинает работать и больше в охлаждении не нуждается.

а) Сколько миллилитров кваса помещается в одну бутылку? Ответ округлите до целых.

Ответ: 500

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 1 балл

б) За какое время бочка наполняет одну бутылку? Ответ выразите в секундах, округлите до целых.

Ответ: 2

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 1 балл

в) Сколько наполненных, но ещё не закрытых бутылок накопится к моменту включения второго автомата?

Ответ: 11 или 10

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 2 балла

г) Сколько наполненных, но ещё не закрытых бутылок будет в очереди к моменту окончания охлаждения первого автомата?

Ответ: 16 или 15

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 3 балла

д) Какой объём кваса успеет разлить бочка к моменту, когда после возобновления работы первого автомата накопившаяся очередь полностью исчезнет? Ответ выразите в литрах, округлите до десятых.

Ответ: засчитывается в диапазоне $[58; 62]$

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 3 балла

Максимальный балл за задание — 10

Решение.

а) Так как 1 л = 1000 мл, в одной бутылке 0.5 л = 500 мл кваса.

б) Время заполнения одной бутылки равно

$$t = \frac{V}{q} = \frac{0.5}{0.25} = 2 \text{ с}.$$

в) За первые 60 с бочка наполнит

$$\frac{60}{2} = 30 \text{ бутылок}.$$

Если в упрощённой модели не учитывать задержку запуска автомата, он закроет

$$\frac{60}{3} = 20 \text{ бутылок},$$

и в очереди окажется $30 - 20 = 10$ бутылок.

При поштучном учёте первую бутылку можно начать закрывать только после её наполнения, то есть в момент 2 с. Она будет закрыта в момент 5 с; далее автомат закрывает по одной бутылке через каждые 3 с. До момента 60 с он успеет закрыть 19 бутылок, поэтому в очереди окажется $30 - 19 = 11$ бутылок.

г) В течение следующих 30 с бочка наполнит

$$\frac{30}{2} = 15 \text{ бутылок},$$

а два автомата закроют

$$2 \cdot \frac{30}{3} = 20 \text{ бутылок}.$$

В упрощённой модели очередь сократится до $10 + 15 - 20 = 5$ бутылок. Во время охлаждения за 60 с будет наполнено ещё

$$\frac{60}{2} = 30 \text{ бутылок},$$

а второй автомат закроет

$$\frac{60}{3} = 20.$$

К окончанию охлаждения в очереди будет $5 + 30 - 20 = 15$ бутылок.

При поштучном учёте после первых 60 с в очереди останется 11 бутылок. За следующие 30 с их число уменьшится до $11 + 15 - 20 = 6$, а к окончанию охлаждения станет равным $6 + 30 - 20 = 16$.

д) После охлаждения два автомата закрывают $\frac{2}{3}$ бутылки в секунду, а бочка наполняет $\frac{1}{2}$ бутылки в секунду. Очередь уменьшается со скоростью

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \text{ бутылки в секунду}.$$

В упрощённой модели очередь из 15 бутылок исчезнет через

$$15 : \left(\frac{1}{6}\right) = 90 \text{ с}.$$

От начала работы линии пройдёт

$$60 + 30 + 60 + 90 = 240 \text{ с},$$

и бочка разольёт $0.25 \cdot 240 = 60.0$ л.

При поштучном учёте для очереди из 16 бутылок потребуется

$$16 : \left(\frac{1}{6}\right) = 96 \text{ с}.$$

В этом случае пройдёт $60 + 30 + 60 + 96 = 246$ с, а объём разлитого кваса составит $0.25 \cdot 246 = 61.5$ л.

Матрица параметров и ответов к вариантам задания 2.

№ варианта	V, л	q, л/с	τ, с	t_1, с	t_2, с	t_3, с	Ответ (пункт а)	Ответ (пункт б)	Ответ в диапазоне (пункт в)		Ответ в диапазоне (пункт г)		Ответ в диапазоне (пункт д)	
1	0.5	0.25	3	60	30	60	500	2	10	11	15	16	58	62
2	0.5	0.25	3	24	6	12	500	2	4	5	5	6	17	19
3	0.6	0.3	3	24	6	18	600	2	4	5	6	7	24	26
4	0.6	0.2	4	48	12	24	600	3	4	5	4	5	21	22
5	0.75	0.25	4	48	12	36	750	3	4	5	5	6	31	32
6	0.75	0.25	5	60	15	30	750	3	8	9	11	12	66	70
7	0.9	0.3	5	60	15	45	900	3	8	9	13	14	92	97
8	0.8	0.2	5	80	20	40	800	4	4	5	3	4	31	33
9	1	0.25	5	80	20	60	1000	4	4	5	4	5	45	48
10	1	0.25	6	48	12	24	1000	4	4	5	5	6	35	37
11	0.4	0.1	6	48	12	36	400	4	4	5	6	7	16	17
12	0.4	0.1	7	112	28	56	400	4	12	13	17	18	65	69
13	0.5	0.125	7	112	28	84	500	4	12	13	20	21	95	101
14	0.6	0.12	6	150	30	60	600	5	5	6	3	4	31	32
15	0.75	0.15	6	150	30	90	750	5	5	6	4	5	44	46
16	0.6	0.12	7	140	35	70	600	5	8	9	9	10	41	43
17	0.75	0.15	7	140	35	105	750	5	8	9	11	12	60	63
18	0.75	0.15	8	160	40	80	750	5	12	13	16	17	87	93
19	0.8	0.16	8	160	40	120	800	5	12	13	19	20	109	115
20	0.8	0.16	9	180	45	90	800	5	16	17	23	24	210	222

Задание 3. Вариант 1. Возвратившись к трассе, Максим и Даниил узнали, что перед следующим заездом в гараж нужно доставить коробку с запчастями. Эту работу выполняет служебный робот. Его маршрут от склада до гаража показан на схеме в следующем масштабе: 1 см соответствует $l = 2$ м в действительности. Устройство движется равномерно со скоростью $v = 0.6$ м/с. На одном из колёс установлен датчик пройденного пути.



После обнуления его показание равно расстоянию, пройденному с начала движения. Во время пробного рейса стрелка заняла положение, показанное на рисунке.

а) Какое расстояние показал датчик после пробного рейса? Ответ выразите в метрах, округлите до десятых.

Ответ: 13.5

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 1 балл

б) Найдите реальную длину всего маршрута. Ответ выразите в метрах, округлите до целых.

Ответ: 30

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 2 балла

в) Какое расстояние останется до следующего поворота, когда датчик покажет значение, отмеченное стрелкой? Ответ выразите в метрах, округлите до десятых.

Ответ: 4.5

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 2 балла

г) За какое время робот может преодолеть весь маршрут до гаража, двигаясь с заданной скоростью? Ответ выразите в секундах, округлите до целых.

Ответ: 50

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 2 балла

д) Оказалось, что заряда аккумулятора хватает только на 40 с движения. На сколько сантиметров на схеме нужно укоротить маршрут, чтобы робот успел доехать до гаража? Ответ округлите до целых.

Ответ: 3

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 3 балла

Максимальный балл за задание — 10

Решение.

а) Между соседними подписанными отметками шкалы 5 м, и этот промежуток разделен на 10 маленьких делений. Цена одного маленького деления равна

$$\frac{5}{10} = 0.5 \text{ м}.$$

Стрелка стоит на седьмом маленьком делении после отметки 10 м, поэтому датчик показывает

$$10 + 7 \cdot 0.5 = 13.5 \text{ м}.$$

б) Длина маршрута на плане равна

$$3 + 2 + 4 + 2 + 4 = 15 \text{ см}.$$

Каждый сантиметр соответствует 2 м, поэтому действительная длина равна

$$15 \cdot 2 = 30 \text{ м}.$$

в) Первые два участка имеют действительные длины $3 \cdot 2 = 6$ м и $2 \cdot 2 = 4$ м. Следующий поворот находится на отметке

$$6 + 4 + 4 \cdot 2 = 18 \text{ м}.$$

При показании датчика 13.5 м до него остаётся

$$18 - 13.5 = 4.5 \text{ м}.$$

г) Время движения равно

$$t = \frac{s}{v} = \frac{30}{0.6} = 50 \text{ с}.$$

д) За 40 с он успеет проехать $0.6 \cdot 40 = 24$ м. Исходный маршрут имеет длину 30 м, значит, его нужно укоротить на $30 - 24 = 6$ м. По масштабу это соответствует

$$\frac{6}{2} = 3 \text{ см на плане}.$$

Матрица параметров и ответов к вариантам задания 2. Пункты б-д)

№ варианта	l, м/см	v, м/с	Время разряда аккумулятора, с	Ответ (пункт б)	Ответ (пункт в)	Ответ (пункт г)	Ответ (пункт д)
1	2	0.6	40	30	4.5	50	3
2	1.4	0.7	22	21	1.9	30	4
3	1.6	0.4	40	24	0.9	60	5
4	1.8	0.6	39	27	2.7	45	2
5	2	0.4	55	30	4.5	75	4
6	2.2	0.55	48	33	6.3	60	3
7	2.4	0.6	36	36	8.1	60	6
8	2.6	0.52	50	39	9.9	75	5
9	2.8	0.7	44	42	0.5	60	4
10	3	0.6	60	45	1.5	75	3
11	3.2	0.8	40	48	2.5	60	5
12	1.4	0.56	30	21	1.9	38	3
13	1.6	0.8	24	24	0.9	30	3
14	1.8	0.45	44	27	2.7	60	4
15	2.2	0.44	50	33	6.3	75	5
16	2.4	0.8	36	36	8.1	45	3
17	2.6	0.65	48	39	9.9	60	3
18	2.8	0.56	55	42	0.5	75	4
19	3	0.75	44	45	1.5	60	4
20	3.2	0.64	60	48	2.5	75	3

