Всероссийская олимпиада школьников по математике
школьный этап 2023-2024
группа 1
задания, ответы и решения

Максимальное количество баллов — 8.

Критерии оценивания: точное совпадение ответа — 1 балл за каждое задание.

6 класс

1. Клон 1. Груз общим весом 12 тонн упакован в контейнеры весом 400 кг. Грузовик может перевозить не более 3 тонн. Какое наименьшее количество грузовиков потребуется, чтобы перевезти весь груз?

Ответ: 5.

Решение. Чтобы разместить груз весом 12 тонн в контейнеры по 400 килограмм, потребуется 30 контейнеров. Один грузовик может увезти максимум 7 контейнеров, так как $3000 : 400 = 7,5$. Четыре грузовика могут увезти максимум $4 \cdot 7 = 28$ контейнеров. Значит, четырёх грузовиков не хватит, а пяти гарантированно хватит – в первый грузовик погрузим два контейнера, а в остальные четыре – по 7 контейнеров.

Клон 2. Груз общим весом 18 тонн упакован в контейнеры весом 400 кг. Грузовик может перевозить не более 3 тонны. Какое наименьшее количество грузовиков потребуется, чтобы перевезти весь груз?

Ответ: 7.

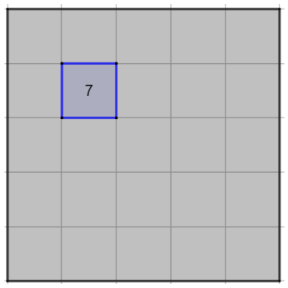
Клон 3. Груз общим весом 24 тонны упакован в контейнеры весом 300 кг. Грузовик может перевозить не более 8 тонн. Какое наименьшее количество грузовиков потребуется, чтобы перевезти весь груз?

Ответ: 4.

Клон 4. Груз общим весом 27 тонн упакован в контейнеры весом 900 кг. Грузовик может перевозить не более 3 тонн. Какое наименьшее количество грузовиков потребуется, чтобы перевезти весь груз?

Ответ: 10.

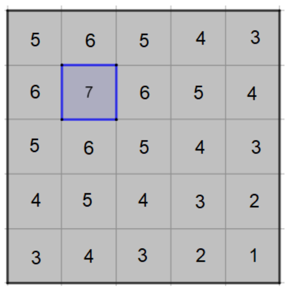
2. Клон 1.



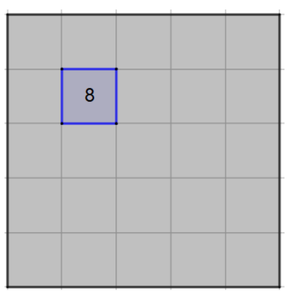
На каждой клетке доски 5×5 лежит по несколько монет. Известно, что в двух соседних по стороне клетках количества монет отличаются на 1. Также известно, что на отмеченной на рисунке клетке лежит 7 монет. Какое наименьшее количество монет может лежать на доске?

Ответ: 105.

Решение. Положим в каждую клетку наименьшее возможное количество монет. В соседней клетке с клеткой, в которой лежит 7 монет, не может лежать менее 6 монет. В каждой клетке, соседней с той, в которой лежит 6 монет, не может лежать менее 5 монет, и так далее. Полученная конструкция приведена на рисунке. И общая сумма чисел равна 105.



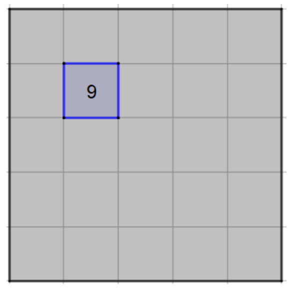
Клон 2.



На каждой клетке доски 5×5 лежит по несколько монет. Известно, что в двух соседних по стороне клетках количества монет отличаются на 1. Также известно, что на отмеченной на рисунке клетке лежит 8 монет. Какое наименьшее количество монет может лежать на доске?

Ответ: 130.

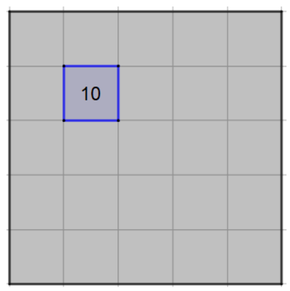
Клон 3.



На каждой клетке доски 5×5 лежит по несколько монет. Известно, что в двух соседних по стороне клетках количества монет отличаются на 1. Также известно, что на отмеченной на рисунке клетке лежит 9 монет. Какое наименьшее количество монет может лежать на доске?

Ответ: 155.

Клон 4.



На каждой клетке доски 5×5 лежит по несколько монет. Известно, что в двух соседних по стороне клетках количества монет отличаются на 1. Также известно, что на отмеченной на рисунке клетке лежит 10 монет. Какое наименьшее количество монет может лежать на доске?

Ответ: 180.

3. Клон 1. В слове ВАРАН каждая буква обозначает цифру, разные буквы соответствуют разным цифрам. Известно, что если вычеркнуть букву Н, то получится число, делящееся на 5, а если вычеркнуть одну из букв А, то полученное число будет делиться на 3. Найдите наибольшее возможное значение, которое может принимать ВАРАН.

Ответ: 95852.

Решение. Если вычеркнуть букву Н, то должно получиться число, делящееся на 5. Следовательно, по признаку делимости на 5, А может быть либо 0 либо 5. Чтобы число было наибольшим, В и А должны быть наибольшими, значит В=9, А=5. Чтобы число делилось на 3, нужно, чтобы сумма его цифр делилась на 3. Тогда В+А+Р+Н должно делиться на 3. То есть 9+5+Р+Н делится на 3. Тогда Р+Н=10, или Р+Н=13, или Р+Н=16 (меньшие суммы нет смысла рассматривать). Наибольшее возможное значение, которое может принимать Р равно 8. Тогда в первом случае Н=2. Во втором Н=5, что невозможно, так как разные буквы соответствуют разным цифрам и А=5. В третьем случае Н=8, что тоже невозможно так как Р=8. Остается только один вариант Р=8, Н=2.

Клон 2. В слове САХАР каждая буква обозначает цифру, разные буквы соответствуют разным цифрам. Известно, что если вычеркнуть букву Р, то получится число, делящееся на 5, а если вычеркнуть одну из букв А, то полученное число будет делиться на 3. Найдите наименьшее возможное значение, которое может принимать САХАР, если число не может начинаться с нуля.

Ответ: 10203.

Клон 3. В слове ПАННО каждая буква обозначает цифру, разные буквы соответствуют разным цифрам. Известно, что если вычеркнуть букву О, то получится число, делящееся на 5, а если вычеркнуть одну из букв Н, то полученное число будет делиться на 3. Найдите наибольшее возможное значение, которое может принимать ПАННО.

Ответ: 98552.

Клон 4. В слове ПАННО каждая буква обозначает цифру, разные буквы соответствуют разным цифрам. Известно, что если вычеркнуть букву О, то получится число, делящееся на 5, а если вычеркнуть одну из букв Н, то полученное число будет делиться на 3. Найдите наименьшее возможное значение, которое может принимать ПАННО.

Ответ: 10553.

4. Клон 1. В классе 18 человек. Никакие две девочки не дружат с одинаковым числом мальчиков. Какое наибольшее количество девочек может быть в классе?

Ответ: 9.

Решение. Оценка. Если в классе хотя бы 10 девочек, то найдется девочка, которая дружит хотя бы с 9 мальчикам следовательно, количество детей в классе хотя бы 19. Противоречие.

Пример. Если девочек 9, то мальчиков тоже 9. Обозначим девочек д1, д2, ..., д9, а мальчиков м1, м2, ... м9. Пусть д1 ни с кем не дружит, д2 дружит только с м1, д3 дружит только с м1 и м2. И так далее, д9 дружит с 8 мальчиками, например, кроме м9.

Клон 2. В классе 22 человека. Никакие две девочки не дружат с одинаковым числом мальчиков. Какое наибольшее количество девочек может быть в классе?

Ответ: 11.

Клон 3. В классе 20 человек. Никакие две девочки не дружат с одинаковым числом мальчиков. Какое наибольшее количество девочек может быть в классе?

Ответ: 10.

Клон 4. В классе 24 человека. Никакие две девочки не дружат с одинаковым числом мальчиков. Какое наибольшее количество девочек может быть в классе?

Ответ: 12.

5. Клон 1. Однажды за круглым столом расселись 16 жителей Средиземья: эльфы и гномы. Эльфы всегда говорят правду другим эльфам и врут гномам, гномы всегда говорят правду эльфам и врут другим гномам. Каждый сидящий за столом обратился к своему соседу справа и произнес: «слева от меня сидит гном». Сколько эльфов сидело за столом?

Ответ: 8.

Решение. Из условия следует, что эльфам всегда говорят правду, а гномам всегда лгут. Рассмотрим произвольную пару рядом сидящих. Гнома будем обозначать Г, а эльфа Э. Возможны 4 случая:

1. Если это два гнома, обозначим их ГГ, то слева и справа от них сидят эльфы: ЭГГЭ.

2. Если это гном и эльф: ГЭ, то слева от гнома сидит гном, а справа от эльфа сидит эльф. Т.е. четверка выглядит так: ГГЭЭ.

3. Если это эльф и гном: ЭГ, то слева от эльфа сидит эльф, а справа от гнома – гном. Получим ЭЭГГ.

4. Если это два эльфа: ЭЭ, то слева и справа от них сидят гномы ГЭЭГ.

Разобьем 16 человек на четверки, и в каждой четверке будет по два гнома и по два эльфа. Значит, гномов и эльфов было поровну.

Клон 2. Однажды за круглым столом расселись 24 жителей Средиземья: эльфы и гномы. Эльфы всегда говорят правду другим эльфам и врут гномам, гномы всегда говорят правду эльфам и врут другим гномам. Каждый сидящий за столом обратился к своему соседу справа и произнес: «слева от меня сидит гном». Сколько гномов сидело за столом?

Ответ: 12.

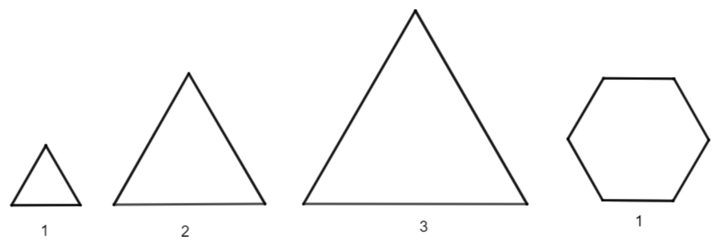
Клон 3. Однажды за круглым столом расселись 36 жителей Средиземья: эльфы и гномы. Эльфы всегда говорят правду другим эльфам и врут гномам, гномы всегда говорят правду эльфам и врут другим гномам. Каждый сидящий за столом обратился к своему соседу справа и произнес: «слева от меня сидит гном». Сколько гномов сидело за столом?

Ответ: 18.

Клон 4. Однажды за круглым столом расселись 28 жителей Средиземья: эльфы и гномы. Эльфы всегда говорят правду другим эльфам и врут гномам, гномы всегда говорят правду эльфам и врут другим гномам. Каждый сидящий за столом обратился к своему соседу справа и произнес: «слева от меня сидит гном». Сколько эльфов сидело за столом?

Ответ: 14.

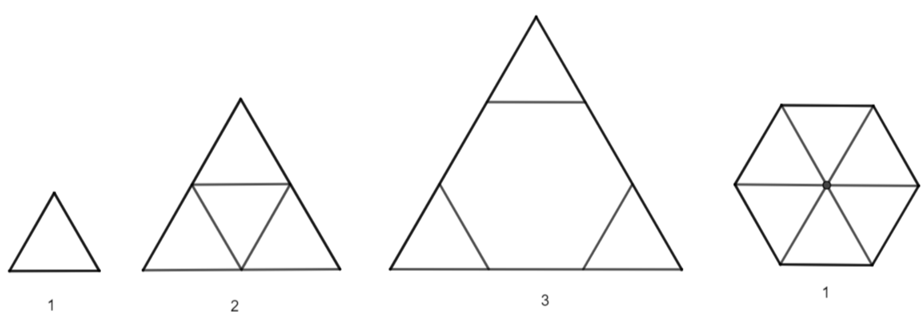
6.



Клон 1. На острове Фогг в ходу аурики – монеты четырех номиналов. Каждая монета – это правильная фигура (все стороны и углы равны). На рисунке для каждой монеты указана длина ее стороны. Монеты чеканят из золота фиксированной толщины, при этом номинал зависит только от веса монеты. Известно, что средний треугольник имеет номинал 100 ауриков. Найдите номиналы остальных монет. Ответ выразите в ауриках.

Ответ: Малый треугольник - 25, Большой треугольник - 225, Шестиугольник - 150.

Решение. Заметим, что средний треугольник состоит из четырех маленьких треугольников, а большой состоит из шестиугольника и трех маленьких треугольников. Шестиугольник, в свою очередь, состоит из шести маленьких треугольников. Поэтому, площадь маленького в 4 раза меньше площади среднего, значит, его номинал равен $100 : 4 = 25$ ауриков, номинал шестиугольника равен $6 \cdot 25 = 150$ ауриков, а номинал большого треугольника равен $9 \cdot 25 = 225$ ауриков.



Клон 2. На острове Фогг в ходу аурики – монеты четырех номиналов. Каждая монета – это правильная фигура (все стороны и углы равны). На рисунке для каждой монеты указана длина ее стороны. Монеты чеканят из золота фиксированной толщины, при этом номинал зависит только от веса монеты. Известно, что средний треугольник имеет номинал 160 ауриков. Найдите номиналы остальных монет. Ответ выразите в ауриках.

Ответ: Малый треугольник - 40, Большой треугольник - 360, Шестиугольник - 240.

Клон 3. На острове Фогг в ходу аурики – монеты четырех номиналов. Каждая монета – это правильная фигура (все стороны и углы равны). На рисунке для каждой монеты указана длина ее стороны. Монеты чеканят из золота фиксированной толщины, при этом номинал зависит только от веса монеты. Известно, что средний треугольник имеет номинал 180 ауриков. Найдите номиналы остальных монет. Ответ выразите в ауриках.

Ответ: Малый треугольник - 45, Большой треугольник - 405, Шестиугольник - 270.

Клон 4. На острове Фогг в ходу аурики – монеты четырех номиналов. Каждая монета – это правильная фигура (все стороны и углы равны). На рисунке для каждой монеты указана длина ее стороны. Монеты чеканят из золота фиксированной толщины, при этом номинал зависит только от веса монеты. Известно, что средний треугольник имеет номинал 120 ауриков. Найдите номиналы остальных монет. Ответ выразите в ауриках.

Ответ: Малый треугольник - 30, Большой треугольник - 270, Шестиугольник - 180.

7. Клон 1. На шахматной доске 10×10 поставили 5 ладей. Какое наибольшее количество клеток может быть НЕ под боем? Ладьи бьют по горизонтали и вертикали, также считается, что ладья бьет клетку, на которой стоит.

Ответ: 56.

Решение. Пусть ладьи не стоят в m строках и n столбцах. Тогда не под боем будет ровно mn клеток. Так как по условию ладьей 5, то они обязательно займут хотя бы 3 строки, либо хотя бы 3 столбца. Пусть для определённости они занимают не менее 3 строк, тогда они бьют все клетки в этих строках, т.е. хотя бы 30 клеток в строках. При этом ладьи могут занимать не менее 1 и не более 5 столбцов.

Если ладьи занимают только 1 столбец, то они занимают 5 строк, значит они бьют не менее 55 клеток.

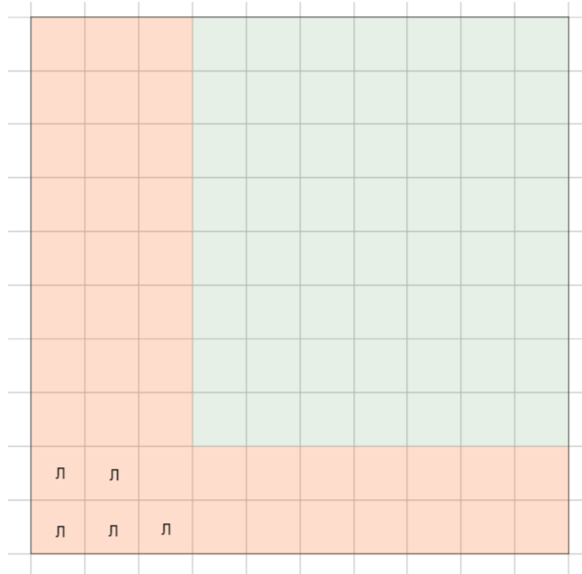
Если ладьи занимают 2 столбца, и 3 строки то они бьют $30+20-6=44$ клетки, тогда не под боем находится 56 клеток.

Если ладьи занимают 2 столбца, и 4 строки, то они бьют $40+20-8=56$ клеток.

Если ладьи занимают 2 столбца, и 5 строк, то они бьют $50+20-10=60$ клеток.

Аналогично, легко убедиться, что если ладьи занимают более 2 столбцов, то количество побитых клеток будет не менее 44, с учетом того, что ладьи занимают не менее 3 строк.

Ниже приведен пример на 56.



Клон 2. На шахматной доске 11×11 поставили 5 ладей. Какое наибольшее количество клеток может быть НЕ под боем? Ладьи бьют по горизонтали и вертикали, также считается, что ладья бьет клетку, на которой стоит.

Ответ: 72.

Клон 3. На шахматной доске 12×12 поставили 5 ладей. Какое наибольшее количество клеток может быть НЕ под боем? Ладьи бьют по горизонтали и вертикали, также считается, что ладья бьет клетку, на которой стоит.

Ответ: 90.

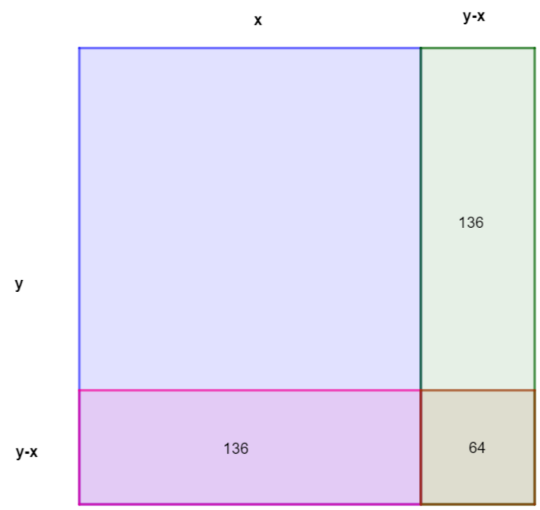
Клон 4. На шахматной доске 13×13 поставили 5 ладей. Какое наибольшее количество клеток может быть НЕ под боем? Ладьи бьют по горизонтали и вертикали, также считается, что ладья бьет клетку, на которой стоит.

Ответ: 110.

8. Клон 1. Дан прямоугольник, длины сторон которого – целые числа. Известно, что можно отрезать от него прямоугольник с целочисленными сторонами площади 136 и получить квадрат. Также известно, что можно подклеить к нему прямоугольник с целочисленными сторонами площади 200 и тоже получить квадрат. Чему равен периметр исходного прямоугольника?

Ответ: 84.

Решение. Пусть исходный прямоугольник имеет размеры $x \times y$, причем $x \leq y$. Отрезанный прямоугольник площади 136, имеет размеры $(y-x) \times x$ – красный прямоугольник на рисунке. Подклеенный прямоугольник площади 200, имеет размеры $(y-x) \times y$ – зеленый прямоугольник на рисунке. Тогда квадрат, образовавшийся в правом нижнем углу со стороной $y-x$, имеет площадь $200-136 = 64$. Отсюда $y-x = 8$. Так как $x \cdot (y-x) = 136$, то $x = 17$, тогда $y = 17+8 = 25$. Периметр исходного прямоугольника равен $2y+2x = 34+50 = 84$.



Клон 2. Дан прямоугольник, длины сторон которого – целые числа. Известно, что можно отрезать от него прямоугольник с целочисленными сторонами площади 112 и получить квадрат. Также известно, что можно подклеить к нему прямоугольник с целочисленными сторонами площади 161 и тоже получить квадрат. Чему равен периметр исходного прямоугольника?

Ответ: 78.

Клон 3. Дан прямоугольник, длины сторон которого – целые числа. Известно, что можно отрезать от него прямоугольник с целочисленными сторонами площади 117 и получить квадрат. Также известно, что можно подклеить к нему прямоугольник с целочисленными сторонами площади 198 и тоже получить квадрат. Чему равен периметр исходного прямоугольника?

Ответ: 70.

Клон 4. Дан прямоугольник, длины сторон которого – целые числа. Известно, что можно отрезать от него прямоугольник с целочисленными сторонами площади 102 и получить квадрат. Также известно, что можно подклеить к нему прямоугольник с целочисленными сторонами площади 138 и тоже получить квадрат. Чему равен периметр исходного прямоугольника?

Ответ: 80.