

Всероссийская олимпиада школьников по математике
школьный этап 2023-2024
группа 1

задания, ответы и решения

Максимальное количество баллов — 8.

Критерии оценивания: точное совпадение ответа — 1 балл за каждое задание.

7 класс

1. Клон 1. Найдите сумму:

$$43 - 45 + 47 - 49 + \dots - 2021 + 2023$$

Ответ: 1033.

Решение. Все слагаемые имеют вид $2k + 1$: $43 = 2 \cdot 21 + 1$, ..., $2023 = 2 \cdot 1011 + 1$. При этом k пробегает значения от 21 до 1011. Следовательно, всего в сумме $1011 - 20 = 991$ слагаемых. Разбиваем первые 990 слагаемых на пары подряд идущих: 43 и (-45), 47 и (-49), ..., 2019 и (-2021). В каждой паре сумма равна (-2), пар всего 495. Следовательно, вся сумма равна $(-2) \cdot 495 + 2023 = -990 + 2023 = 1033$.

Клон 2. Найдите сумму:

$$103 - 105 + 107 - 109 + \dots - 2021 + 2023$$

Ответ: 1063.

Клон 3. Найдите сумму:

$$123 - 125 + 127 - 129 + \dots - 2021 + 2023$$

Ответ: 1073.

Клон 4. Найдите сумму:

$$23 - 25 + 27 - 29 + \dots - 2021 + 2023$$

Ответ: 1023.

2. Клон 1. Незнайка вычислил сумму всех четырехзначных чисел, начинающихся с тройки, а Пончик - сумму всех четырехзначных чисел, начинающихся с пятёрки. На сколько сумма у Пончика больше суммы у Незнайки?

Ответ: 2000000.

Решение. Четырёхзначных чисел, начинающихся с тройки - 1000. Столько же будет и четырёхзначных чисел, начинающихся с пятёрки. Разобьём их на пары чисел, отличающихся только в старшем разряде. Тогда в каждой такой паре будет разность $\overline{5ABC} - \overline{3ABC} = 2000$. Всего таких пар будет 1000, поэтому сумма Пончика будет на 2000000 больше, чем у Незнайки.

Клон 2. Винтик вычислил сумму всех трехзначных чисел, начинающихся с двойки, а Шпунтик - сумму всех трехзначных чисел, начинающихся с семёрки. На сколько сумма у Шпунтика больше суммы у Винтика?

Ответ: 50000.

Клон 3. Маша вычислила сумму всех четырехзначных чисел, начинающихся с пятерки, а Наташа - сумму всех четырехзначных чисел, начинающихся с восьмёрки. На сколько сумма у Наташи больше суммы у Маши?

Ответ: 3000000.

Клон 4. Алиса вычислила сумму всех трехзначных чисел, начинающихся с девятки, а Боб - сумму всех трехзначных чисел, начинающихся с единицы. На сколько сумма у Алисы больше суммы у Боба?

Ответ: 80000.

3. Клон 1. Бараш вырезал из бумаги прямоугольник с периметром 64 см, а Крош разрезал его на пять прямоугольников с одинаковым периметром. Сумма длин всех разрезов равна 28 см. Чему равен периметр каждого из пяти получившихся прямоугольников?

Ответ: 24 см.

Решение. Если суммировать периметры получившихся прямоугольников, то внешний периметр исходного считается один раз, а каждый из отрезков "разреза" будет считаться дважды.

Итого: $(64 + 28 \cdot 2) : 5 = 24$ см.

Клон 2. Петя вырезал из бумаги прямоугольник с периметром 48 см, а Вася разрезал его на шесть прямоугольников с одинаковым периметром. Сумма длин всех разрезов равна 36 см. Чему равен периметр каждого из шести получившихся прямоугольников?

Ответ: 20 см.

Клон 3. Андрей вырезал из бумаги прямоугольник с периметром 62 см, а Боря разрезал его на четыре прямоугольника с одинаковым периметром. Сумма длин всех разрезов равна 41 см. Чему равен периметр каждого из четырёх получившихся прямоугольников?

Ответ: 36 см.

Клон 4. Аня вырезала из бумаги прямоугольник с периметром 70 см, а Маня разрезала его на пять прямоугольников с одинаковым периметром. Сумма длин всех разрезов равна 50 см. Чему равен периметр каждого из пяти получившихся прямоугольников?

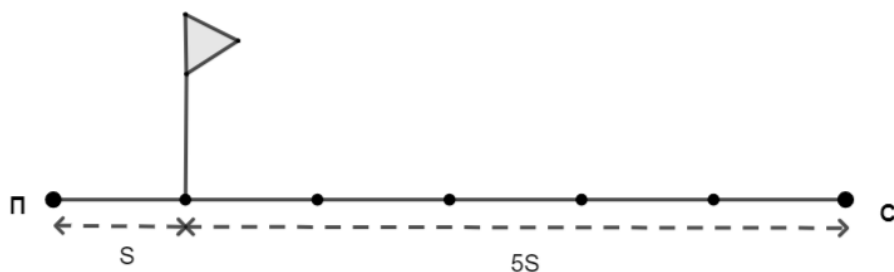
Ответ: 34 см.

4. Клон 1. Кот Матроскин вышел из Простоквашино в Сметанино, чтобы прийти туда через 5 часов. Одновременно из Сметанино на велосипеде выехал Шарик, который проезжает это расстояние за 1 час. Через 50 минут после их встречи из Сметанино в Простоквашино выехал дядя Федор, который проезжает весь путь за 1 час 40 минут. За сколько минут до своего прибытия в Сметанино Матроскин встретится с дядей Федором?

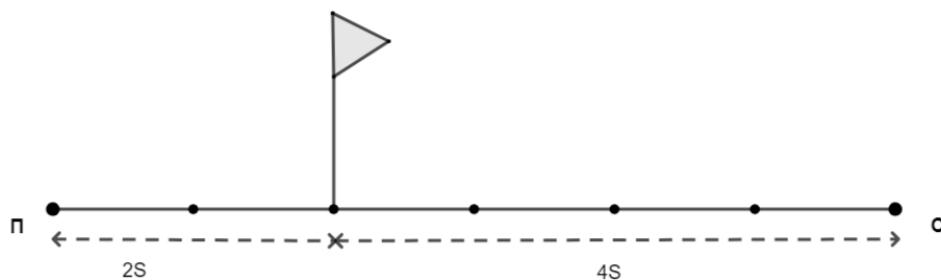
Ответ: 150 минут.

Решение. Так как скорость Шарика в 5 раз больше скорости Матроскина, к моменту встречи Шарик пройдёт $\frac{5}{6}$ расстояния между селами, а Матроскин - $\frac{1}{6}$. Встреча произойдёт через $\frac{5}{6} \cdot 60 = 50$ минут. К моменту выезда дяди Фёдора, Матроскин преодолет уже $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ пути. 1 час 40 минут - это 100 минут, а 5 часов - 300 минут, поэтому скорость дяди Фёдора втрое больше скорости Матроскина. Следовательно, к моменту встречи с дядей Федором Матроскин пройдет четверть от оставшегося ему пути, равного $\frac{2}{3}$ от первоначального.

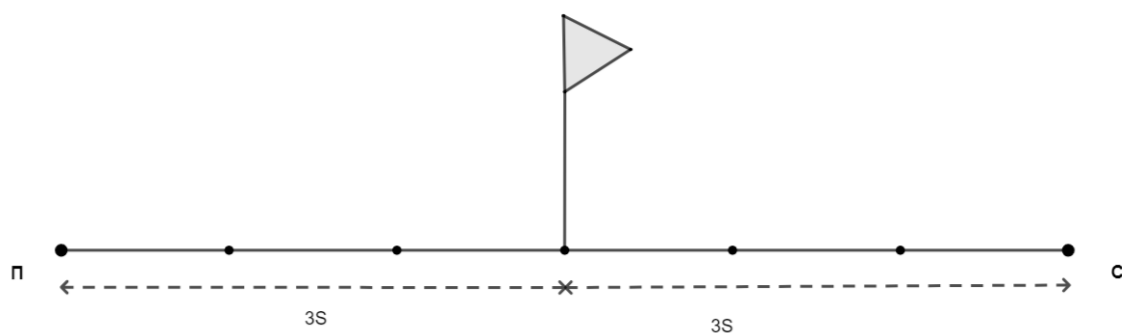
Встреча Матроскина и Шарика



Выезд дяди Федора из Сметанино



Встреча Матроскина и дяди Федора



Поскольку $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$, то к моменту встречи с дядей Федором Матроскин пройдет половину расстояния между сёлами ($\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$), а на оставшуюся половину ему потребуется 2,5 часа = 150 минут.

Клон 2. Кот Матроскин вышел из Простоквашино в Сметанино, чтобы прийти туда через 4 часа. Одновременно из Сметанино на велосипеде выехал Шарик, который проезжает это расстояние за 1 час. Через 48 минут после их встречи из Сметанино в Простоквашино выехал дядя Федор, который проезжает весь путь за 2 часа. За сколько минут до своего прибытия в Сметанино Матроскин встретится с дядей Федором?

Ответ: 96 минут.

Клон 3. Кот Матроскин вышел из Простоквашино в Сметанино, чтобы прийти туда через 4,5 часа. Одновременно из Сметанино на велосипеде выехал Шарик, который проезжает это расстояние за 54 минуты. Через 45 минут после их встречи из Сметанино в Простоквашино выехал дядя Федор, который проезжает весь путь за 90 минут. За сколько минут до своего прибытия в Сметанино Матроскин встретится с дядей Федором?

Ответ: 135 минут.

Клон 4. Кот Матроскин вышел из Простоквашино в Сметанино, чтобы прийти туда через 6 часов. Одновременно из Сметанино на велосипеде выехал Шарик, который проезжает это расстояние за 1,5 часа. Через 72 минуты после их встречи из Сметанино в Простоквашино выехал дядя Федор, который проезжает весь путь за 3 часа. За сколько минут до своего прибытия в Сметанино Матроскин встретится с дядей Федором?

Ответ: 144 минуты.

5. Клон 1. При покупке шляпы Незнайка смог расплатиться, используя только монеты достоинством в 7 и 11 сантиков. Если бы шляпа стоила на сантик дороже, то он бы не смог расплатиться без сдачи только такими монетами. Чему равна наибольшая возможная цена шляпы?

Ответ: 58.

Решение. Пусть $n = 7 \cdot x + 11 \cdot y$. $n + 1 = 7(x - 3) + 11 \cdot (y + 2)$. Следовательно, если Незнайка использовал хотя бы три монеты 7 сантиков, то он смог бы набрать и $n + 1$ сантик.

$n + 1 = 7(x + 8) + 11 \cdot (y - 5)$. Следовательно, если Незнайка использовал хотя бы пять монет 11 сантиков, то он смог бы набрать и $n + 1$ сантик.

Это означает, что Незнайка расплатился, используя не более двух монет в 7 сантиков и не более четырёх монет в 11 сантиков и $n \leq 2 \cdot 7 + 4 \cdot 11 = 58$.

$59 = 55 + 4 = 44 + 15 = 33 + 26 = 22 + 37 = 11 + 48$. 4, 15, 26, 37, 48 и 59 на 7 не делятся, поэтому 59 сантиков набрать невозможно.

Клон 2. При покупке шляпы Незнайка смог расплатиться, используя только монеты достоинством в 5 и 13 сантиков. Если бы шляпа стоила на сантик дороже, то он бы не смог расплатиться без сдачи только такими монетами. Чему равна наибольшая возможная цена шляпы?

Ответ: 46.

Клон 3. При покупке шляпы Незнайка смог расплатиться, используя только монеты достоинством в 7 и 12 сантиков. Если бы шляпа стоила на сантик дороже, то он бы не смог расплатиться без сдачи только такими монетами. Чему равна наибольшая возможная цена шляпы?

Ответ: 64.

Клон 4. При покупке шляпы Незнайка смог расплатиться, используя только монеты достоинством в 5 и 17 сантиков. Если бы шляпа стоила на сантик дороже, то он бы не смог расплатиться без сдачи только такими монетами. Чему равна наибольшая возможная цена шляпы?

Ответ: 62.

6. Клон 1. В шестизначном натуральном числе стёрли последнюю цифру и полученное число сложили с исходным. В результате получилось 380239. Найдите исходное число.

Ответ: 345672.

Решение. Обозначим последнюю цифру за x , а пятизначное число, получившееся после её стирания - за y . Тогда исходное число было равно $10y + x$. По условию задачи $10y + x + y = 380239$. $11y + x = 380239$. Так как x — это цифра, т.е. меньше 11, то x — это остаток от деления на 11 числа 380239. $380239 = 11 \cdot 34567 + 2$. Следовательно, $x = 2$, $y = 34567$.

Клон 2. В шестизначном натуральном числе стёрли последнюю цифру и полученное число сложили с исходным. В результате получилось 624593. Найдите исходное число.

Ответ: 567812.

Клон 3. В шестизначном натуральном числе стёрли последнюю цифру и полученное число сложили с исходным. В результате получилось 841607. Найдите исходное число.

Ответ: 765098.

Клон 4. В шестизначном натуральном числе стёрли последнюю цифру и полученное число сложили с исходным. В результате получилось 787878. Найдите исходное число.

Ответ: 716253.

7. Клон 1. Калькулятор Незнайки испортился и перестал показывать цифры 2 и 3 (Например, если Незнайка вводит число 723425, то на дисплее отобразится 745). Незнайка ввёл пятизначное число и на дисплее появилось число 455, после чего Знайка выписал на доску все числа, которые мог ввести Незнайка. Сколько чисел выписано на доску?

Ответ: 40.

Решение. Нам нужно из пяти разрядов числа выбрать три, на которые встанут 4, 5, 5. Это можно сделать 10 способами (выбрать три позиции из пяти - это то же самое, что выбрать две оставшиеся, $5 \cdot 4 : 2 = 10$. Делим на два, поскольку каждый вариант выбора двух мест мы посчитали дважды). Каждый способ дает четыре варианта заполнить пропуски двойками и тройками: 22, 23, 32, 33. Итого, Незнайка выпишет $10 \cdot 4 = 40$ чисел.

Клон 2. Калькулятор Незнайки испортился и перестал показывать цифры 4 и 5 (Например, если Незнайка вводит число 723425, то на дисплее отобразится 7232). Незнайка ввёл шестизначное число и на дисплее появилось число 2233, после чего Знайка выписал на доску все числа, которые мог ввести Незнайка. Сколько чисел выписано на доску?

Ответ: 60.

Клон 3. Калькулятор Незнайки испортился и перестал показывать цифры 1 и 0 (Например, если Незнайка вводит число 103402, то на дисплее отобразится 342). Незнайка ввёл пятизначное число и на дисплее появилось число 455, после чего Знайка выписал на доску все числа, которые мог ввести Незнайка. Сколько чисел выписано на доску?

Ответ: 32.

Клон 4. Калькулятор Незнайки испортился и перестал показывать цифры 0 и 1 (Например, если Незнайка вводит число 701415, то на дисплее отобразится 745). Незнайка ввёл шестизначное число и на дисплее появилось число 2233, после чего Знайка выписал на доску все числа, которые мог ввести Незнайка. Сколько чисел выписано на доску?

Ответ: 50.

8. Клон 1. В клубе бизнесменов состояния у всех членов клуба различны и измеряются натуральным числом тугриков. Два бизнесмена дружат, если состояние каждого из них делится на разность их состояний. Какое максимальное число друзей может быть у бизнесмена с состоянием 4^{50} тугриков?

Ответ: 201.

Решение. Пусть состояние друга данного бизнесмена равно N . Разность $4^{50} - N$ должна быть делителем числа $4^{50} = 2^{100}$. Это 202 варианта $\pm 2^0, \pm 2^1, \dots, \pm 2^{100}$. Для каждого из них однозначно определяется N , но при этом мы посчитаем и вариант $N = 0$, который не удовлетворяет условию задачи (состояния — натуральные числа). Итого, $202 - 1 = 201$.

Клон 2. В клубе бизнесменов состояния у всех членов клуба различны и измеряются натуральным числом тугриков. Два бизнесмена дружат, если состояние каждого из них делится на разность их состояний. Какое максимальное число друзей может быть у бизнесмена

с состоянием 9^{100} тугриков?

Ответ: 401.

Клон 3. В клубе бизнесменов состояния у всех членов клуба различны и измеряются натуральным числом тугриков. Два бизнесмена дружат, если состояние каждого из них делится на разность их состояний. Какое максимальное число друзей может быть у бизнесмена с состоянием 25^{52} тугриков?

Ответ: 209.

Клон 4. В клубе бизнесменов состояния у всех членов клуба различны и измеряются натуральным числом тугриков. Два бизнесмена дружат, если состояние каждого из них делится на разность их состояний. Какое максимальное число друзей может быть у бизнесмена с состоянием 49^{94} тугриков?

Ответ: 377.