

Всероссийская олимпиада школьников по математике
школьный этап 2023-2024
группа 1

задания, ответы и решения.

Максимальное количество баллов – 8.

Критерии оценивания: точное совпадение ответа – 1 балл за каждое задание

8 класс

1. Клон 1. Вначале цистерна с водой была на 20 процентов пуста. Когда из неё вылили 6000 литров воды, она стала на 20 процентов полной. Определите ёмкость цистерны. Ответ выразите в литрах.

Ответ: 10000 литров.

Решение. В начальный момент было заполнено $\frac{4}{5}$ цистерны, после переливания осталась $\frac{1}{5}$. Значит 6000 литров составляет $\frac{3}{5}$ цистерны, и её ёмкость равна $6000 \cdot \frac{5}{3} = 10000$ литров.

Клон 2. Вначале цистерна с водой была на 30 процентов пуста. Когда из неё вылили 8000 литров воды, она стала на 30 процентов полной. Определите ёмкость цистерны. Ответ выразите в литрах.

Ответ: 20000 литров.

Клон 3. Вначале цистерна с водой была на 15 процентов пуста. Когда из неё вылили 2100 литров воды, она стала на 15 процентов полной. Определите ёмкость цистерны. Ответ выразите в литрах.

Ответ: 3000 литров.

Клон 4. Вначале цистерна с водой была на 35 процентов пуста. Когда из неё вылили 9000 литров воды, она стала на 35 процентов полной. Определите ёмкость цистерны. Ответ выразите в литрах.

Ответ: 30000 литров.

2. Клон 1. Найдите наименьшее натуральное число с суммой цифр 29, в записи которого есть цифра 7.

Ответ: 4799.

Решение. Сумма оставшихся цифр (без семерки) равна $29 - 7 = 22$. Это как минимум три цифры (двумя можно набрать сумму не более 18). Следовательно, искомое число - четырёхзначное. Минимальным оно будет в том случае, когда в разряде тысяч будет стоять

минимальная цифра. Это $22 - 9 - 9 = 4$. Остальные цифры нужно расставить в порядке возрастания и в результате получится число 4799.

Клон 2. Найдите наименьшее натуральное число с суммой цифр 23, в записи которого есть цифра 3.

Ответ: 2399.

Клон 3. Найдите наименьшее натуральное число с суммой цифр 31, в записи которого есть цифра 8.

Ответ: 5899.

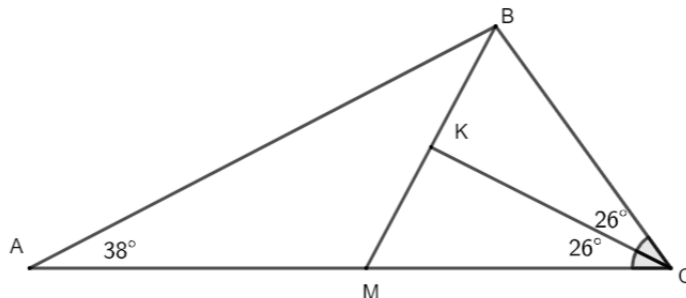
Клон 4. Найдите наименьшее натуральное число с суммой цифр 25, в записи которого есть цифра 4.

Ответ: 3499.

3. Клон 1. Про прямоугольный треугольник ABC известно, что $\angle A = 38^\circ$, $\angle C = 90^\circ$. Найдите острый угол между биссектрисой, проведённой из угла B и медианой, проведенной из угла C .

Ответ: 78° .

Решение. Угол B в треугольнике ABC равен $90^\circ - \angle A = 90^\circ - 38^\circ = 52^\circ$.



Пусть CM — медиана треугольника ABC , проведенная из вершины прямого угла. Она равна половине гипотенузы AB , следовательно, треугольник BMC — равнобедренный ($MB = MC$). BK — биссектриса треугольника BMC . $\angle KBM = 52^\circ / 2 = 26^\circ$. $\angle BMC = 2 \cdot 38^\circ = 76^\circ$, как внешний угол равнобедренного треугольника AMC . $\angle BKM = 180^\circ - \angle BMK - \angle MBK = 180^\circ - 76^\circ - 26^\circ = 78^\circ$.

Клон 2. Про прямоугольный треугольник ABC известно, что $\angle A = 32^\circ$, $\angle C = 90^\circ$. Найдите острый угол между биссектрисой, проведённой из угла B и медианой, проведенной из угла C .

Ответ: 87° .

Клон 3. Про прямоугольный треугольник ABC известно, что $\angle A = 26^\circ$, $\angle C = 90^\circ$. Найдите острый угол между биссектрисой, проведённой из угла B и медианой, проведенной из угла C .

Ответ: 84° .

Клон 4. Про прямоугольный треугольник ABC известно, что $\angle A = 18^\circ$, $\angle C = 90^\circ$. Найдите острый угол между биссектрисой, проведённой из угла B и медианой, проведенной из угла C .

Ответ: 72° .

4. Клон 1. За круглым столом сидят 150 человек: рыцари, всегда говорящие правду, и лжецы, которые всегда лгут. Для каждого человека его *окружение* состоит из четырех человек: двоих, сидящих справа от него, и двоих - слева. Каждый из сидящих за столом сделал заявление: "В моём окружении поровну рыцарей и лжецов". Какое наибольшее количество рыцарей могло находиться за столом?

Ответ: 100.

Решение. Рассмотрим шесть человек, сидящих подряд: 1 2 3 4 5 6. Предположим, что в этой шестерке не более одного лжеца. Тогда либо 3, либо 4 - рыцарь и в его окружении находятся не менее трёх рыцарей, что противоречит условию. Следовательно, лжецов в шестёрке не более двух.

Разбиваем 150 человек на 25 шестёрок и получаем, что рыцарей не более $4 \cdot 25 = 100$.

Несложно проверить, что пример ...РРЛРРЛРРЛ... (и так далее по кругу) удовлетворяет условию задачи.

Клон 2. За круглым столом сидят 120 человек: рыцари, всегда говорящие правду, и лжецы, которые всегда лгут. Для каждого человека его *окружение* состоит из четырех человек: двоих, сидящих справа от него, и двоих - слева. Каждый из сидящих за столом сделал заявление: "В моём окружении поровну рыцарей и лжецов". Какое наибольшее количество рыцарей могло находиться за столом?

Ответ: 80.

Клон 3. За круглым столом сидят 180 человек: рыцари, всегда говорящие правду, и лжецы, которые всегда лгут. Для каждого человека его *окружение* состоит из четырех человек: двоих, сидящих справа от него, и двоих слева. Каждый из сидящих за столом сделал заявление: "В моём окружении поровну рыцарей и лжецов!" Какое наибольшее количество рыцарей могло находиться за столом?

Ответ: 120.

Клон 4. За круглым столом сидят 270 человек: рыцари, всегда говорящие правду, и лжецы, которые всегда лгут. Для каждого человека его *окружение* состоит из четырех человек: двоих, сидящих справа от него, и двоих слева. Каждый из сидящих за столом сделал заявление: "В моём окружении поровну рыцарей и лжецов!" Какое наибольшее количество рыцарей могло находиться за столом?

Ответ: 180.

5. Клон 1. Чебурашка проснулся между восемью и девятью часами и заметил, что часовая стрелка его будильника делит пополам угол между минутной стрелкой и показывающей на

цифру 9 стрелкой звонка. Через сколько минут должен прозвенеть звонок?

Ответ: 18 минут.

Решение. Пусть искомый момент времени — это 8 часов и x минут. Тогда за эти x минут минутная стрелка повернулась на $6x$ градусов (начав с отметки 12), а часовая стрелка — на $x/2$ градусов, начав с отметки 8. Тогда угол между минутной стрелкой и стрелкой будильника равен $270 - 6x$ градусов, а угол между стрелкой будильника и часовой стрелкой равен $30 - 0,5x$ градусов.

Решаем уравнение $270 - 6x = 2(30 - 0,5 \cdot x)$. $270 - 6x = 60 - x$. $5x = 210$. $x = 42$.

Искомое время 8:42, тогда звонок прозвенит через $60 - 42 = 18$ минут.

Клон 2. Чебурашка проснулся между семью и восемью часами и заметил, что часовая стрелка его будильника делит пополам угол между минутной стрелкой и показывающей на цифру 8 стрелкой звонка. Через сколько минут должен прозвенеть звонок?

Ответ: 24 минуты.

Клон 3. Чебурашка проснулся между девятью и десятью часами и заметил, что часовая стрелка его будильника делит пополам угол между минутной стрелкой и показывающей на отметку "10" стрелкой звонка. Через сколько минут должен прозвенеть звонок?

Ответ: 12 минут.

Клон 4. Чебурашка проснулся между десятью и одиннадцатью часами и заметил, что часовая стрелка его будильника делит пополам угол между минутной стрелкой и показывающей на отметку "11" стрелкой звонка. Через сколько минут должен прозвенеть звонок?

Ответ: 6 минут.

6. Клон 1. Из клетчатого прямоугольника $m \times n$ ($m > 2$, $n > 2$) 91 способом можно вырезать клетчатый квадрат 2×2 . Каков периметр этого прямоугольника?

Ответ: 44.

Решение. Заметим что левая верхняя клетка нашего квадрата 2×2 может располагаться внутри прямоугольника $(m - 1) \times (n - 1)$. Следовательно,

$$(m - 1) \times (n - 1) = 91 = 7 \cdot 13.$$

Значит, одна из скобок в левой части равна 7, другая - 13, а искомый прямоугольник имеет размер 8×14 и периметр $(8 + 14) \cdot 2 = 44$.

Клон 2. Из клетчатого прямоугольника $m \times n$ ($m > 2$, $n > 2$) 95 способами можно вырезать клетчатый квадрат 2×2 . Каков периметр этого прямоугольника?

Ответ: 52.

Клон 3. Из клетчатого прямоугольника $m \times n$ ($m > 2$, $n > 2$) 57 способами можно вырезать клетчатый квадрат 2×2 . Каков периметр этого прямоугольника?

Ответ: 48.

Клон 4. Из клетчатого прямоугольника $m \times n$ ($m > 2$, $n > 2$) 65 способами можно вырезать клетчатый квадрат 2×2 . Каков периметр этого прямоугольника?

Ответ: 40.

7. Клон 1. У Гэндальфа есть коробка, в которой лежат конфеты пяти сортов. При каком наименьшем количестве конфет в коробке он может гарантированно (т.е. независимо от распределения конфет по сортам) выдать из коробки каждому из семи гномов по семь конфет одного сорта? (У разных гномов сорта полученных конфет могут отличаться друг от друга.)

Ответ: 73.

Решение. Заметим, что справедлива следующая Лемма: если взять набор из 31 (или более) конфеты, то, согласно принципу Дирихле, в нём найдутся семь конфет одного сорта.

(Если вы не знаете принцип Дирихле, то рассуждать можно так: Предположим, что семь конфет одного сорта не найдутся, тогда всего каждого сорта не более шести и в сумме не больше $5 \cdot 6 = 30$. Противоречие.)

Тогда $31 + 6 \cdot 7 = 73$ конфет будет достаточно для того чтобы Гэндальф выдал каждому из гномов 7 конфет одного сорта. Действительно, согласно сформулированной выше лемме, в наборе из 73 конфет найдутся семь конфет одного сорта. Выдадим их гному номер 1. Останется набор из $73 - 7 = 66$ конфет, к которому тоже можно применить лемму. Когда эта операция будет проделана шесть раз, останется $73 - 6 \cdot 7 = 31$ конфета, из которой выберем 7 одного сорта для гнома номер 7.

То, что этого меньшего количества конфет недостаточно, следует из существования примера, когда в четырех сортах по 6 конфет, а в пятом - 48 (или менее). Тогда первые четыре сорта гномам не подойдут, а пятый сорт может "удовлетворить" не более 6 гномов.

Клон 2. У Гэндальфа есть коробка, в которой лежат конфеты семи сортов. При каком наименьшем количестве конфет в коробке он может гарантированно (т.е. независимо от распределения конфет по сортам) выдать из коробки каждому из семи гномов по семь конфет одного сорта? (У разных гномов сорта полученных конфет могут отличаться друг от друга.)

Ответ: 85.

Клон 3. У Гэндальфа есть коробка, в которой лежат конфеты шести сортов. При каком наименьшем количестве конфет в коробке он может гарантированно (т.е. независимо от распределения конфет по сортам) выдать из коробки каждому из семи гномов по шесть конфет одного сорта? (У разных гномов сорта полученных конфет могут отличаться друг от друга.)

Ответ: 67.

Клон 4.

У Гэндальфа есть коробка, в которой лежат конфеты восьми сортов. При каком наименьшем количестве конфет в коробке он может гарантированно (т.е. независимо от распределения конфет по сортам) выдать из коробки каждому из семи гномов по семь конфет одного сорта? (У разных гномов сорта полученных конфет могут отличаться друг от друга.)

Ответ: 91.

8. Клон 1. 10000 точек расположены на прямой так, что расстояния между двумя соседними одинаковы, и пронумерованы по порядку. Точка под номером 1 покрашена в чёрный цвет, а точка под номером 1351 - в красный. Алиса хочет покрасить в чёрный цвет еще несколько точек так, чтобы выполнялись два условия:

- 1) расстояния между соседними чёрными точками были одинаковы;
- 2) красная точка должна располагаться ровно посередине между двумя соседними чёрными.

Сколькими возможными способами Алиса может выбрать расстояние между соседними чёрными точками?

Ответ: 12.

Решение. Примем за единичный отрезок расстояние между двумя соседними точками. Через x обозначим искомое расстояние между соседними чёрными точками. Номера соседних чёрных точек, между которыми расположена красная, обозначим за y и $y + 1$.

Расстояние от красной точки до чёрной точкой с номером y равно $1350 - (y - 1) \cdot x$, а расстояние от красной точки до чёрной точкой с номером $y + 1$ равно $y \cdot x - 1350$.

Получаем уравнение $1350 - (y - 1) \cdot x = y \cdot x - 1350$.

Приведем подобные слагаемые: $x(2y - 1) = 2700$. Нас интересует, сколько различных натуральных значений (больших 1) может принимать x . Для каждого нечётного натурального делителя числа 2700 значение x определяется однозначно. Поэтому нам остаётся подсчитать количество нечётных делителей числа $2700 = 3^3 \cdot 5^2 \cdot 2^2$. Все такие делители состоят только из простых множителей 3 (в количестве не более трёх) и 5 (в количестве не более двух). Следовательно, их количество равно $(3 + 1)(2 + 1) = 12$.

Клон 2. 20000 точек расположены на прямой так, что расстояния между двумя соседними одинаковы, и пронумерованы по порядку. Точка под номером 1 покрашена в чёрный цвет, а точка под номером 15751 - в красный. Алиса хочет покрасить в чёрный цвет еще несколько точек так, чтобы выполнялись два условия:

- 1) расстояния между соседними чёрными точками были одинаковы;
- 2) красная точка должна располагаться ровно посередине между двумя соседними чёрными.

Сколькими возможными способами Алиса может выбрать расстояние между соседними чёрными точками?

Ответ: 24.

Клон 3. 20000 точек расположены на прямой так, что расстояния между двумя соседними одинаковы, и пронумерованы по порядку. Точка под номером 1 покрашена в чёрный цвет, а точка под номером 7939 - в красный. Алиса хочет покрасить в чёрный цвет еще несколько точек так, чтобы выполнялись два условия:

1) расстояния между соседними чёрными точками были одинаковы;

2) красная точка должна располагаться ровно посередине между двумя соседними чёрными.

Сколькими возможными способами Алиса может выбрать расстояние между соседними чёрными точками?

Ответ: 15.

Клон 4. 10000 точек расположены на прямой так, что расстояния между двумя соседними одинаковы, и пронумерованы по порядку. Точка под номером 1 покрашена в чёрный цвет, а точка под номером 6751 - в красный. Алиса хочет покрасить в чёрный цвет еще несколько точек так, чтобы выполнялись два условия:

1) расстояния между соседними чёрными точками были одинаковы;

2) красная точка должна располагаться ровно посередине между двумя соседними чёрными.

Сколькими возможными способами Алиса может выбрать расстояние между соседними чёрными точками?

Ответ: 16.