

Всероссийская олимпиада школьников по математике

школьный этап 2023-2024

группа 1

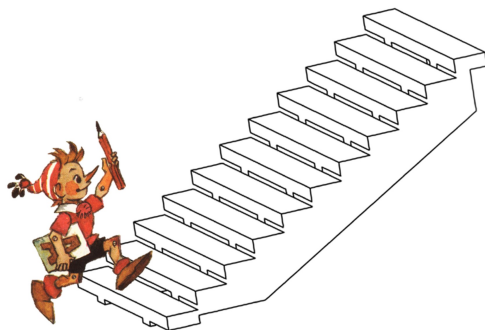
задания, ответы и решения

Максимальное количество баллов — 8.

Критерии оценивания: точное совпадение ответа — 1 балл за каждое задание.

1.

5 класс

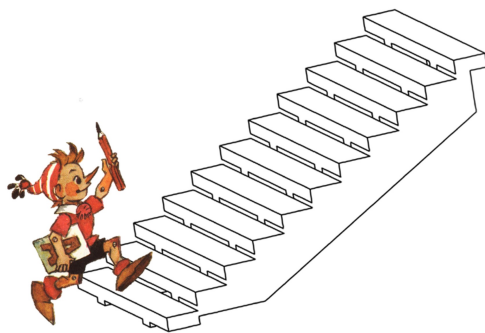


Клон 1. Буратино поднимается по лестнице. Если он будет наступать на каждую ступеньку, то начав с левой ноги, он и на последнюю ступеньку наступит левой ногой. Если же будет шагать через одну ступеньку, то, начав с левой ноги и второй ступеньки, на предпоследнюю ступеньку он наступит правой. Сколько может быть ступенек у лестницы?

Представить выбор из вариантов ответов: 12, 13, 14, 15, 16, 17

Ответ. 13, 17.

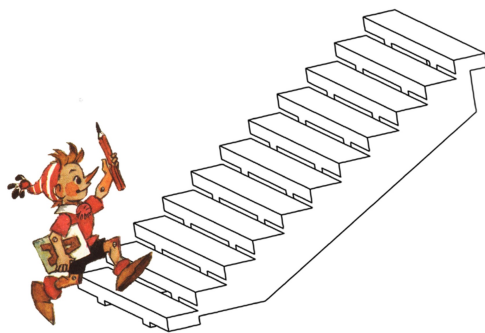
Решение. В первом случае, когда Буратино наступает на каждую ступеньку, левой ногой он наступит на 1, 3, 5, 7 и т.д. последнюю ступеньку. Таким образом, количество ступенек на лестнице нечетно (то есть могут подойти только ответы 13, 15, 17). Во втором случае, левой ногой он будет наступать на 2, 6, 10, 14, 18 и т.д., а правой – на 4, 8, 12, 16, и т.д. Так как правой ногой он наступает на предпоследнюю ступеньку, то всего на лестнице может быть 5, 9, 13, 17 и т.д. ступенек. Из представленных вариантов подходят только два: 13 и 17. Заметим, что первое условие на самом деле лишнее, оно лишь позволяет понять, что количество ступенек нечетно.



Клон 2. Буратино поднимается по лестнице. Если он будет наступать на каждую ступеньку, то начав с левой ноги, он и на последнюю ступеньку наступит левой ногой. Если же будет шагать через одну ступеньку, то, начав с левой ноги и второй ступеньки, на предпоследнюю ступеньку он наступит правой. Сколько может быть ступенек у лестницы?

Представить выбор из вариантов ответов: 16, 17, 18, 19, 20, 21

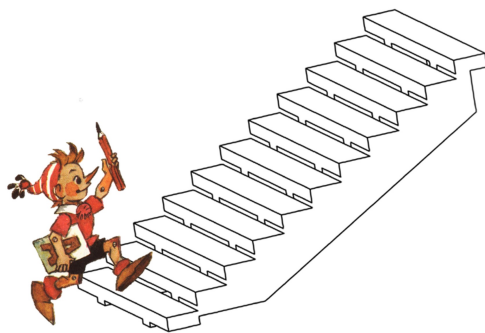
Ответ. 17, 21.



Клон 3. Буратино поднимается по лестнице. Если он будет наступать на каждую ступеньку, то начав с правой ноги, он на последнюю ступеньку наступит левой ногой. Если же будет шагать через одну ступеньку, то, начав с левой ноги и второй ступеньки, на последнюю ступеньку он наступит правой. Сколько может быть ступенек у лестницы?

Представить выбор из вариантов ответов: 10, 11, 12, 13, 14, 15

Ответ. 10, 14.



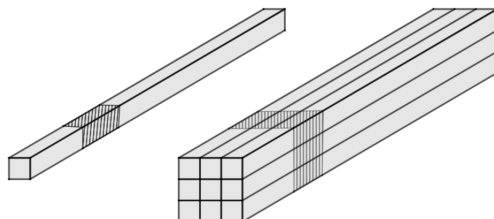
Клон 4. Буратино поднимается по лестнице. Если он будет наступать на каждую ступеньку, то начав с правой ноги, он на последнюю ступеньку наступит левой ногой. Если же

будет шагать через одну ступеньку, то, начав с левой ноги и второй ступеньки, на последнюю ступеньку он наступит правой. Сколько может быть ступенек у лестницы?

Представить выбор из вариантов ответов: 13, 14, 15, 16, 17, 18

Ответ. 14, 18.

2. Клон 1.

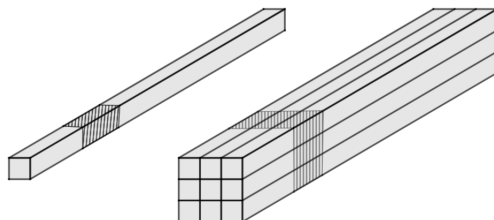


У Пети и Васи есть куски верёвки одинаковой длины. Петя намотал свою верёвку на один квадратный брусок, показанный на рисунке слева, и у него получилось сделать ровно 12 полных оборотов. А Вася решил обмотать сразу 9 таких же брусков (на рисунке справа) своим куском веревки. Сколько полных оборотов он смог сделать, если оба мальчика наматывали веревку в один слой?

Ответ: 4.

Решение. По условию торцевая сторона у бруска – это квадрат. Пусть периметр этого квадрата равен $4l$. Если 9 таких брусков сложить как указано на рисунке, то образуется квадрат со стороной $3l$ и его периметр равен $12l$. Получается, что на 3 оборота вокруг малого бруска потребуется столько же веревки, сколько нужно на один оборот вокруг брусков. Так как Петя сделал 12 полных оборотов, то Вася сможет сделать в 3 раза меньше, т.е. 4 полных оборота.

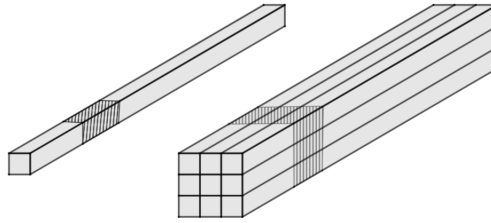
Клон 2.



У Пети и Васи есть куски верёвки одинаковой длины. Петя намотал свою верёвку на один квадратный брусок, показанный на рисунке слева, и у него получилось сделать ровно 15 полных оборотов. А Вася решил обмотать сразу 9 таких же брусков (на рисунке справа) своим куском веревки. Сколько полных оборотов он смог сделать, если оба мальчика наматывали веревку в один слой?

Ответ: 5.

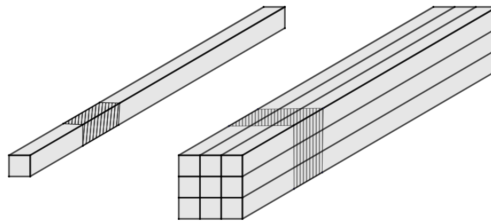
Клон 3.



У Пети и Васи есть куски верёвки одинаковой длины. Петя намотал свою верёвку на один квадратный брусок, показанный на рисунке слева, и у него получилось сделать ровно 18 полных оборотов. А Вася решил обмотать сразу 9 таких же брусков (на рисунке справа) своим куском веревки. Сколько полных оборотов он смог сделать, если оба мальчика наматывали веревку в один слой?

Ответ: 6.

Клон 4.



У Пети и Васи есть куски верёвки одинаковой длины. Петя намотал свою верёвку на один квадратный брусок, показанный на рисунке слева, и у него получилось сделать ровно 21 полных оборотов. А Вася решил обмотать сразу 9 таких же брусков (на рисунке справа) своим куском веревки. Сколько полных оборотов он смог сделать, если оба мальчика наматывали веревку в один слой?

Ответ: 7.

3. Клон 1. На каждую из шести сторон игрального кубика нанесено количество очков — от 1 до 6. Известно, что сумма очков на противоположных гранях равна 7. На 5 игральных кубиках выпало суммарно 12 очков. Чему равна сумма очков на сторонах кубиков, обратных к выпавшим?

Ответ: 23.

Решение. Если рассмотреть сумму очков на выпавших гранях и на гранях противоположных им, то она равна $7 \cdot 5 = 35$, так как всего кубиков 5 и сумма очков на противоположных гранях равна 7. Значит сумма очков на гранях, противоположных выпавшим, равна $35 - 12 = 23$.

Клон 2. На каждую из шести сторон игрального кубика нанесено количество очков – от 1 до 6. Известно, что сумма очков на противоположных гранях равна 7. На 5 игральных кубиках выпало суммарно 14 очков. Чему равна сумма очков на сторонах кубиков, обратных к выпавшим?

Ответ: 21.

Клон 3. На каждую из шести сторон игрального кубика нанесено количество очков – от 1 до 6. Известно, что сумма очков на противоположных гранях равна 7. На 6 игральных кубиках выпало суммарно 11 очков. Чему равна сумма очков на сторонах кубиков, обратных к выпавшим?

Ответ: 31.

Клон 4. На каждую из шести сторон игрального кубика нанесено количество очков – от 1 до 6. Известно, что сумма очков на противоположных гранях равна 7. На 6 игральных кубиках выпало суммарно 17 очков. Чему равна сумма очков на сторонах кубиков, обратных к выпавшим?

Ответ: 25.

4. Клон 1.

На 8 карточках написаны цифры от 1 до 8. Из нескольких карточек составили число, с суммой цифр, равной 12. Какое наибольшее число могло получиться?

Ответ: 6321.

Решение. Покажем, что число которое могло получиться не более чем четырехзначное. Если бы это было хотя бы пятизначное число, то сумма его цифр была бы не меньше $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 > 12$, так как каждую цифру можно использовать не более одного раза.

У четырехзначного числа первая цифра не больше 6, так как $7 + 1 + 2 + 3 = 13 > 12$. Таким образом, наибольшее число – это 6321.

Клон 2.

На 8 карточках написаны цифры от 1 до 8. Из нескольких карточек составили число, с суммой цифр, равной 13. Какое наибольшее число могло получиться?

Ответ: 7321.

Клон 3.

На 8 карточках написаны цифры от 1 до 8. Из нескольких карточек составили число, с суммой цифр, равной 14. Какое наибольшее число могло получиться?

Ответ: 8321.

Клон 4.

На 8 карточках написаны цифры от 1 до 8. Из нескольких карточек составили число, с суммой цифр, равной 11. Какое наибольшее число могло получиться?

Ответ: 5321.

5. Клон 1. У Маши есть несколько монет по 2, 5 и 10 рублей и она решила выложить их на столе особым образом. Сначала девочка выложила в ряд несколько десятирублёвых монет, затем между каждыми двумя соседними десятирублёвыми она положила по две пятирублёвые, и, наконец, между каждыми соседними пятирублёвыми она выложила по пять двухрублёвых. Соседними считаются две монеты, если между ними нет других монет. Сколько десятирублёвых монет лежит на столе, если всего на столе оказалось 250 рублей?

Ответ: 9.

Решение. Заметим, что после того как монеты выложены мы имеем такую последовательность монет:

10 5 2 2 2 2 2 5 10 5 2 2 2 2 2 5 10 ... 10. Её можно разбить на группы 10 5 2 2 2 2 2 5, а последнюю монету 10 рублей отложим в сторону. В каждую группу входит ровно одна десятирублёвая монета, и сумма в каждой группе составляет 30 рублей. Тогда количество таких групп равно $(250 - 10)/30 = 8$. Получаем, что всего десятирублёвых монет будет $8 + 1 = 9$.

Клон 2. У Маши есть несколько монет по 2, 5 и 10 рублей и она решила выложить их на столе особым образом. Сначала девочка выложила в ряд несколько десятирублёвых монет, затем между каждыми двумя соседними десятирублёвыми она положила по две пятирублёвые, и, наконец, между каждыми соседними пятирублёвыми она выложила по пять двухрублёвых. Соседними считаются две монеты, если между ними нет других монет. Сколько десятирублёвых монет лежит на столе, если всего на столе оказалось 280 рублей?

Ответ: 10.

Клон 3. У Маши есть несколько монет по 2, 5 и 10 рублей и она решила выложить их на столе особым образом. Сначала девочка выложила в ряд несколько десятирублёвых монет, затем между каждыми двумя соседними десятирублёвыми она положила по две пятирублёвые, и, наконец, между каждыми соседними пятирублёвыми она выложила по пять двухрублёвых. Соседними считаются две монеты, если между ними нет других монет. Сколько десятирублёвых монет лежит на столе, если всего на столе оказалось 340 рублей?

Ответ: 12.

Клон 4. У Маши есть несколько монет по 2, 5 и 10 рублей и она решила выложить их на столе особым образом. Сначала девочка выложила в ряд несколько десятирублёвых монет, затем между каждыми двумя соседними десятирублёвыми она положила по две пятирублёвые, и, наконец, между каждыми соседними пятирублёвыми она выложила по пять двухрублёвых. Соседними считаются две монеты, если между ними нет других монет. Сколько десятирублёвых монет лежит на столе, если всего на столе оказалось 370 рублей?

Ответ: 13.

6. Клон 1. В магазине продаются два вида конфет: стоимостью по 100 и 400 рублей за килограмм. Общая стоимость конфет каждого вида одинаковая. По какой цене надо продавать килограмм смеси этих конфет, чтобы сохранить такую же выручку?

Ответ: 160.

Решение. Назовем конфеты ценой по 100 рублей за килограмм «дешёвыми», а ценой по 400 рублей за килограмм «дорогими». Так как общая стоимость конфет каждого вида одинаковая, то дешевых конфет в 4 раза больше, чем дорогих. Значит, в каждом килограмме смеси $1/5$ дорогих конфет и $4/5$ дешёвых. Получаем, что килограмм смеси должен стоить $400 \cdot 1/5 + 100 \cdot 4/5 = 8 + 8 = 160$ рублей.

Клон 2. В магазине продаются два вида конфет: стоимостью по 150 и 600 рублей за килограмм. Общая стоимость конфет каждого вида одинаковая. По какой цене надо продавать килограмм смеси этих конфет, чтобы сохранить такую же выручку?

Ответ: 240.

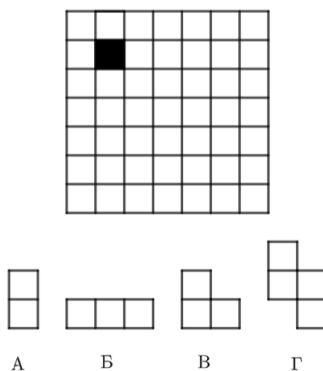
Клон 3. В магазине продаются два вида конфет: стоимостью по 200 и 800 рублей за килограмм. Общая стоимость конфет каждого вида одинаковая. По какой цене надо продавать килограмм смеси этих конфет, чтобы сохранить такую же выручку?

Ответ: 320.

Клон 4. В магазине продаются два вида конфет: стоимостью по 250 и 1000 рублей за килограмм. Общая стоимость конфет каждого вида одинаковая. По какой цене надо продавать килограмм смеси этих конфет, чтобы сохранить такую же выручку?

Ответ: 400.

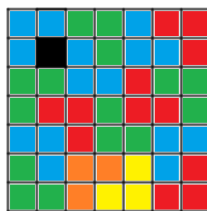
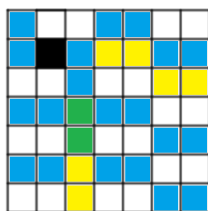
7. Клон 1.



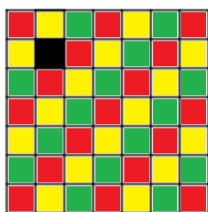
Имеется клетчатая доска 7×7 , с одной вырезанной клеткой. Требуется разрезать доску на одинаковые фигурки. Выберите фигурки, на которые её можно разрезать. Укажите все верные варианты.

Ответ: А, В.

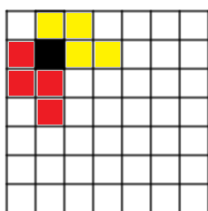
Решение. На рисунке показано, как можно разрезать доску на фигурки А, В



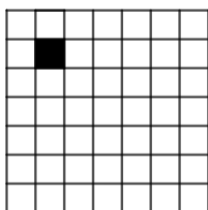
Докажем, что доску нельзя разрезать на фигурки вида Б. Для этого применим идею раскраски. Раскрасим доску в 3 цвета с помощью диагональной раскраски. На рисунке приведена одна из возможных таких раскрасок. Заметим, что любая полоска 1×3 будет всегда покрывать три клетки всех цветов, причём каждого цвета по одной. Поэтому, если бы можно было разрезать доску на фигурки указанного вида, то количество клеток каждого цвета было бы одинаковым, а это не так. Красных клеток 17, желтых 16, а зеленых 15. Значит, разрезать доску не удастся.



На фигурки вида Г разрезать доску также не удастся, так как ими невозможно покрыть левую верхнюю угловую клетку (см. рисунок).



Клон 2.



А

Б

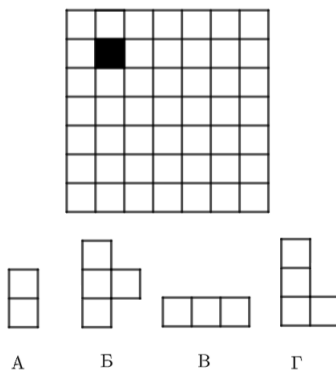
В

Г

Имеется клетчатая доска 7×7 , с одной вырезанной клеткой. Требуется разрезать доску на одинаковые фигурки. Выберите фигурки, на которые её можно разрезать. Укажите все верные варианты.

Ответ: В, Г.

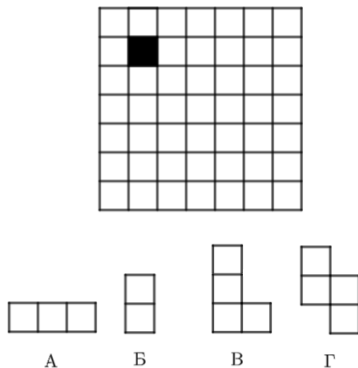
Клон 3.



Имеется клетчатая доска 7×7 , с одной вырезанной клеткой. Требуется разрезать доску на одинаковые фигурки. Выберите фигурки, на которые её можно разрезать. Укажите все верные варианты.

Ответ: А, Г.

Клон 4.



Имеется клетчатая доска 7×7 , с одной вырезанной клеткой. Требуется разрезать доску на одинаковые фигурки. Выберите фигурки, на которые её можно разрезать. Укажите все верные варианты.

Ответ: Б, В.

8. Клон 1. В ряд выстроились 211 человек, каждый из них либо рыцарь, либо лжец. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Каждый из них говорит: «Количество лжецов слева от меня хотя бы на два больше, чем количество рыцарей справа». Сколько в ряду лжецов?

Ответ: 106.

Решение. Рассмотрим самого левого человека в этом ряду. Слева от него никого нет, значит, он не может сказать правду, следовательно, он лжец, значит, хотя бы один лжец есть. Аналогично, второй человек слева тоже лжец. Рассмотрим самого правого человека. Он точно рыцарь, так как слева от него хотя бы два лжеца, а справа никого нет.

Теперь рассмотрим самого правого лжеца, назовем его Петя. Если слева от него есть рыцарь (рассмотрим ближайшего слева и назовем его Вася), то количество лжецов слева от Васи не больше, чем количество лжецов слева от Пети. А количество рыцарей справа от Пети и справа от Васи одинаковое. Тогда, если Вася говорит правду, то Петя тоже. Противоречие. Это приводит к тому, что в ряду из 211 человек сначала идут лжецы, а потом рыцари: Л Л ... Л Р ... Р. Рассмотрим самого левого рыцаря. Если слева от него n лжецов, то справа должно быть не более $n - 2$ рыцаря. Теперь рассмотрим самого правого лжеца, для него слева $n - 1$ лжец, тогда рыцарей не менее $n - 2$. Значит, рыцарей либо $n - 1$, либо $n - 2$. В первом случае $n + n - 1 = 211$, откуда $n = 106$, во втором $n + n - 2 = 211$, n — не целое.

Клон 2. В ряд выстроились 215 человек, каждый из них либо рыцарь, либо лжец. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Каждый из них говорит: «Количество лжецов слева от меня хотя бы на два больше, чем количество рыцарей справа». Сколько в ряду лжецов?

Ответ: 108.

Клон 3. В ряд выстроились 231 человек, каждый из них либо рыцарь, либо лжец. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Каждый из них говорит: «Количество лжецов слева от меня хотя бы на два больше, чем количество рыцарей справа». Сколько в ряду лжецов?

Ответ: 116.

Клон 4. В ряд выстроились 223 человек, каждый из них либо рыцарь, либо лжец. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Каждый из них говорит: «Количество лжецов слева от меня хотя бы на два больше, чем количество рыцарей справа». Сколько в ряду лжецов?

Ответ: 112.