Всероссийская олимпиада школьников по математике
школьный этап 2023-2024
группа 1
задания, ответы и решения

Максимальное количество баллов — 8.

Критерии оценивания: точное совпадение ответа — 1 балл за каждое задание.

9 класс

1. Клон 1. На числовой прямой отмечены точки $A(a)$, $B(b)$ и $C(2a)$, где a и b, $b > a$ – положительные числа. Какое наибольшее значение может иметь сумма $a+b$, если известно, что расстояние между точками A и B равно 4, а расстояние между точками C и B равно 3?

Ответ: 18

Решение. Возможны два случая: 1) точка B между точками A и C; 2) точка C между точками A и B.

Для 1 случая $AC = 4+3 = 7$. Но $AC = 2a - a$, значит, $a = 7$. Тогда $b = 7+4 = 11$. Следовательно, $a+b = 18$.

Для 2 случая $AC = 2a - a = a$ и $AC = 4-3 = 1$, потому $a = 1$. Тогда $BC = b - 2a = 3$, то есть $b = 5$. И потому $a+b = 6 < 18$.

Клон 2. На числовой прямой отмечены точки $A(a)$, $B(b)$ и $C(2a)$, где a и b, $b > a$ – положительные числа. Какое наибольшее значение может иметь сумма $a+b$, если известно, что расстояние между точками A и B равно 5, а расстояние между точками C и B равно 3?

Ответ: 21

Клон 3. На числовой прямой отмечены точки $A(a)$, $B(b)$ и $C(2a)$, где a и b, $b > a$ – положительные числа. Какое наибольшее значение может иметь сумма $a+b$, если известно, что расстояние между точками A и B равно 5, а расстояние между точками C и B равно 2?

Ответ: 19

Клон 4. На числовой прямой отмечены точки $A(a)$, $B(b)$ и $C(2a)$, где a и b, $b > a$ – положительные числа. Какое наибольшее значение может иметь сумма $a+b$, если известно, что расстояние между точками A и B равно 6, а расстояние между точками C и B равно 3?

Ответ: 24

2. Клон 1. Пусть N – наименьшее целое число с суммой цифр 2023. Найдите сумму цифр числа $N + 2024$.

Ответ: 15

Решение. Из чисел с заданной суммой цифр меньше то, у которого меньшее количество цифр. Из равенства $2023 = 9 \cdot 224 + 7$ следует, что наименьшее число с суммой цифр 2023 – это число $799\ldots9$ (224 девятки). Тогда $N + 2024 = 800\ldots02023$. Следовательно, $S(N + 2024) = 8 + 2 + 2 + 3 = 15$.

Клон 2. Пусть N – наименьшее целое число с суммой цифр 2022. Найдите сумму цифр числа $N + 2026$.

Ответ: 16

Клон 3. Пусть N – наименьшее целое число с суммой цифр 2021. Найдите сумму цифр числа $N + 2024$.

Ответ: 13

Клон 4. Пусть N – наименьшее целое число с суммой цифр 2020. Найдите сумму цифр числа $N + 2023$.

Ответ: 11

3. Клон 1. Когда свободный член квадратного трёхчлена умножили на 9, его дискриминант также умножился на 9. Какой наименьший корень может иметь получившийся трёхчлен, если один из корней исходного трёхчлена равен 5?

Ответ: -15

Решение.

Пусть $f = ax^2 + bx + c$ – заданный трехчлен, D – его дискриминант, а D_1 – дискриминант получившегося квадратного трехчлена. По условию $D_1 = b^2 - 4a \cdot 9c = 9D = 9(b^2 - 4ac)$. Отсюда $8b^2 = 0$, то есть $b = 0$. Корнями исходного трехчлена являются числа $\pm\sqrt{-c/a}$, нового - $\pm\sqrt{-9c/a} = \pm 3\sqrt{-c/a}$. Поэтому наименьшим корнем будет число $-3 \cdot 5 = -15$.

Клон 2. Когда свободный член квадратного трёхчлена умножили на 16, его дискриминант также умножился на 16. Какой наименьший корень может иметь получившийся трёхчлен, если один из корней исходного трёхчлена равен 3?

Ответ: -12

Клон 3. Когда свободный член квадратного трёхчлена умножили на 25, его дискриминант также умножился на 25. Какой наименьший корень может иметь получившийся трёхчлен, если один из корней исходного трёхчлена равен 4?

Ответ: -20

Клон 4. Когда свободный член квадратного трёхчлена умножили на 81, его дискриминант также умножился на 81. Какой наименьший корень может иметь получившийся трёхчлен, если один из корней исходного трёхчлена равен 4?

Ответ: -36

4. Клон 1. На окружности расположены 28 точек, которые делят её на равные дуги. Одна из точек – синяя, остальные – красные. Рассматриваются треугольники с вершинами в этих точках, у которых две вершины – красные, одна – синяя. Сколько среди этих треугольников – прямоугольные?

Ответ: 39

Решение. Искомые треугольники разбиваются на две группы: 1) у которых вершина прямого угла – синяя; 2) у которых вершина прямого угла – красная. В первом случае вершины острых углов являются концами диаметра окружности. Значит, количество таких треугольников равно числу способов выбора пар диаметрально противоположных точек среди $26 : 2 = 13$ пар. То есть таких треугольников – 13. Во втором случае синяя вершина A входит в искомый треугольник вместе с диаметрально противоположной ей вершиной C, а вершина B прямого угла выбирается среди 26 остальных точек. Таких треугольников – 26. Всего получается $13 + 26 = 39$ треугольников.

Клон 2. На окружности расположены 30 точек, которые делят её на равные дуги. Одна из точек – синяя, остальные – красные. Рассматриваются треугольники с вершинами в этих точках, у которых две вершины - красные, одна – синяя. Сколько среди этих треугольников – прямоугольные?

Ответ: 42

Клон 3. На окружности расположены 36 точек, которые делят её на равные дуги. Одна из точек – синяя, остальные – красные. Рассматриваются треугольники с вершинами в этих точках, у которых две вершины – красные, одна – синяя. Сколько среди этих треугольников – прямоугольные?

Ответ: 51

Клон 4. На окружности расположены 38 точек, которые делят её на равные дуги. Одна из точек – синяя, остальные – красные. Рассматриваются треугольники с вершинами в этих точках, у которых две вершины – красные, одна – синяя. Сколько среди этих треугольников – прямоугольные?

Ответ: 54

5. Клон 1. Найдите наименьшее пятизначное число n такое, что $P(n) = P(n+1) = P(n+2) < P(n+3) = 648$ (через $P(k)$ обозначается произведение цифр числа k).

Ответ: 89908

Решение. Пусть $n = \overline{abcde}$. Если $e < 7$, то все 4 числа $n, n+1, n+2, n+3$ начинаются с одинаковых четверок цифр, а заканчиваются разными цифрами. Значит, либо $P(n) = P(n+1) = P(n+2) = P(n+3) = 0$, либо $P(n) < P(n+1)$, что противоречит условию. Если $e = 7$, тогда $n+3$ оканчивается на 0 и $P(n+3) = 0$. Так же $e \neq 9$, так как в противном случае число $n+1$ оканчивается нулем, и тогда $P(n+1) = 0$, а $P(n+3) = 2P(n+2)$ (числа $n+2$ и $n+3$ отличаются только последними цифрами: соответственно 1 и 2). Значит, $P(n+3) = 2P(n+2) = 2P(n+1) = 0$, что противоречит условию. Итак, $e = 8$ и тогда числа $n+2$ и $n+3$ начинаются с четырех одинаковых цифр. Кроме того, $P(n+2) = 0$. Следовательно, из условия, $P(n+1) = 0$. Тогда $abcd = 0$. Цифра d не равна девятке, иначе предпоследняя цифра числа $n+3$ равна нулю. Тогда число $n+3$ начинается с цифр a, b, c, значит, $d = 0$. Тогда $n + 3 = \overline{abc11}$ и $P(n + 3) = abc$. Но $648 = 8 \cdot 9 \cdot 9$, значит, $n = 89908$.

Клон 2. Найдите наименьшее пятизначное число n такое, что $P(n) = P(n + 1) = P(n + 2) < P(n + 3) = 567$ (через $P(k)$ обозначается произведение цифр числа k).

Ответ: 79908

Клон 3. Найдите наименьшее пятизначное число n такое, что $P(n) = P(n + 1) = P(n + 2) < P(n + 3) = 486$ (через $P(k)$ обозначается произведение цифр числа k).

Ответ: 69908

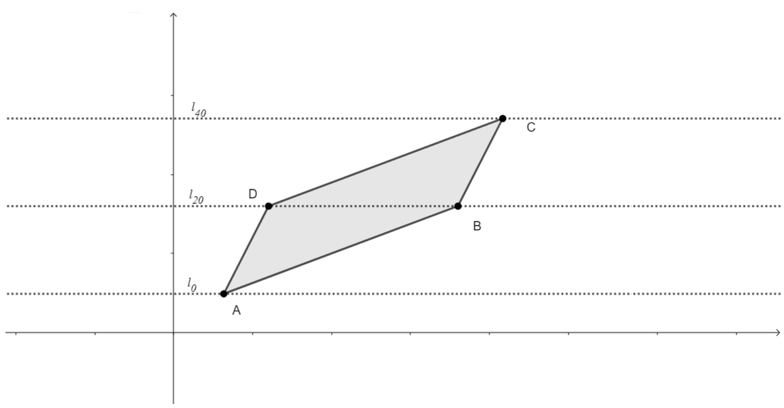
Клон 4. Найдите наименьшее пятизначное число n такое, что $P(n) = P(n + 1) = P(n + 2) < P(n + 3) = 405$ (через $P(k)$ обозначается произведение цифр числа k).

Ответ: 59908

6. Клон 1. На координатной плоскости нарисован параллелограмм $ABCD$. Известно, что две из линий $y = n$, где n – целые числа, проходят через вершины A и C, а ещё 39 из этих линий пересекают параллелограмм не в вершинах A и C, при этом одна из линий проходит через вершины B и D. Найдите сумму длин отрезков, высекаемых параллелограммом на этих линиях, если известно, что самый длинный из этих отрезков имеет длину 100.

Ответ: 2000

Решение. Пусть $l_0 : y = n$, $l_1 : y = n + 1$, $l_2 : y = n + 2$, $\ldots$, $l_{40} : y = n + 40$ – прямые, имеющие общие точки с параллелограммом. По условию прямая l_0 проходит через точку A, l_{40} – через точку C, а l_{20} – через точки B и D, длина отрезка BD равна 100.



Каждый треугольник AB_kD_k, образованный точками пересечения прямой l_k $(1 \le k \le 19)$ с отрезками AB и AD и вершиной A, подобен треугольнику ABD с коэффициентом $k/20$. Значит, длина отрезка B_kD_k, высекаемого параллелограммом на прямой l_k, равна $\frac{k}{20} \cdot 100 = 5k$. А сумма длин этих отрезков равна $5(1 + 2 + 3 + \ldots + 19) = 950$. Так же сумма длин отрезков, высекаемых параллелограммом на прямых l_k $(21 \le k \le 39)$, равна 950. А сумма длин всех отрезков равна $950 + 100 + 950 = 2000$.

Клон 2. На координатной плоскости нарисован параллелограмм $ABCD$. Известно, что две из линий $y = n$, где n – целые числа, проходят через вершины A и C, а ещё 37 из этих линий пересекают параллелограмм не в вершинах A и C, при этом одна из линий проходит через вершины B и D. Найдите сумму длин отрезков, высекаемых параллелограммом на этих линиях, если известно, что самый длинный из этих отрезков имеет длину 100.

Ответ: 1900

Клон 3. На координатной плоскости нарисован параллелограмм $ABCD$. Известно, что две из линий $y = n$, где n – целые числа, проходят через вершины A и C, а ещё 35 из этих линий пересекают параллелограмм не в вершинах A и C, при этом одна из линий проходит через вершины B и D. Найдите сумму длин отрезков, высекаемых параллелограммом на этих линиях, если известно, что самый длинный из этих отрезков имеет длину 100.

Ответ: 1800

Клон 4. На координатной плоскости нарисован параллелограмм $ABCD$. Известно, что две из линий $y = n$, где n – целые числа, проходят через вершины A и C, а ещё 33 из этих линий пересекают параллелограмм не в вершинах A и C, при этом одна из линий проходит через вершины B и D. Найдите сумму длин отрезков, высекаемых параллелограммом на этих линиях, если известно, что самый длинный из этих отрезков имеет длину 100.

Ответ: 1700

7. Клон 1. Когда в произведении нескольких различных натуральных чисел, больших 1000, один из множителей уменьшили на натуральное число k, произведение уменьшилось в 4 раза. А если бы в исходном произведении другой множитель уменьшили на число k, произведение уменьшилось бы в 24 раза. При каком наименьшем k это возможно?

Ответ: 966

Решение. Пусть a – первый из множителей, b – второй, а M – произведение остальных множителей (если этих множителей нет, то $M = 1$). По условию $abM = 4(a-k)bM$ и $abM = 24a(b-k)M$. Отсюда $a = 4(a-k)$, то есть $3a = 4k$ и $b = 24(b-k)$, то есть $23b = 24k$. Значит, k делится на 3 и делится на 23, то есть делится на 69. Пусть $k = 69l$. Тогда $a = \frac{4}{3} \cdot 69l = 92l$; $b = \frac{24}{23} \cdot 69l = 72l$. Меньшее из этих чисел $72l$ должно быть больше 1000. Значит, $l \geq 14$ (l – целое число). Тогда наименьшее значение k равно $69 \cdot 14 = 966$.

Клон 2. Когда в произведении нескольких различных натуральных чисел, больших 1000, один из множителей уменьшили на натуральное число k, произведение уменьшилось в 4 раза. А если бы в исходном произведении другой множитель уменьшили на число k, произведение уменьшилось бы в 20 раз. При каком наименьшем k это возможно?

Ответ: 969

Клон 3. Когда в произведении нескольких различных натуральных чисел, больших 900, один из множителей уменьшили на натуральное число k, произведение уменьшилось в 4 раза. А если бы в исходном произведении другой множитель уменьшили на число k, произведение уменьшилось бы в 18 раз. При каком наименьшем k это возможно?

Ответ: 867

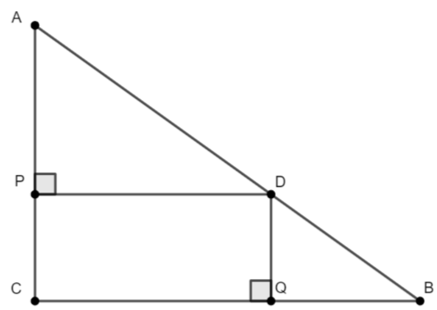
Клон 4. Когда в произведении нескольких различных натуральных чисел, больших 1000, один из множителей уменьшили на натуральное число k, произведение уменьшилось в 4 раза. А если бы в исходном произведении другой множитель уменьшили на число k, произведение уменьшилось бы в 30 раз. При каком наименьшем k это возможно?

Ответ: 1044

8. Клон 1. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC взята точка D. Из точки D опущены перпендикуляры DP и DQ на стороны AC и BC треугольника ABC. Найдите площадь треугольника ABC, если площади треугольников APD и BQD равны 50 и 32.

Ответ: 162

Решение.



Из подобия треугольников ADP и ABC с коэффициентом k_1 следует, что $\sqrt{50} : \sqrt{S} = k_1 = AD:AB$. Так же и $\sqrt{32} : \sqrt{S} = k_2 = BD:AB$. Сложив, получаем: $(\sqrt{50} + \sqrt{32})\colon \sqrt{S} = (AD + BD):AB$, $(5\sqrt{2} + 4\sqrt{2}):\sqrt{S} = 1$, $\sqrt{S} = 9\sqrt{2}$.

Клон 2. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC взята точка D. Из точки D опущены перпендикуляры DP и DQ на стороны AC и BC треугольника ABC. Найдите площадь треугольника ABC, если площади треугольников APD и BQD равны 72 и 32.

Ответ: 200

Клон 3. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC взята точка D. Из точки D опущены перпендикуляры DP и DQ на стороны AC и BC треугольника ABC. Найдите площадь треугольника ABC, если площади треугольников APD и BQD равны 72 и 50.

Ответ: 242

Клон 4. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC взята точка D. Из точки D опущены перпендикуляры DP и DQ на стороны AC и BC треугольника ABC. Найдите площадь треугольника ABC, если площади треугольников APD и BQD равны 98 и 50.

Ответ: 288