**Рекомендации**

**по формированию математической грамотности.**

**Математическая грамотность** - это способность человека проводить математические рассуждения и формулировать, применять, интерпретировать математику для решения проблем в разнообразных контекстах реального мира.

*Она включает использование:*

- математических понятий,

- процедур,

- фактов,

- инструментов, чтобы описать, объяснить и предсказать явления.

*Математическая грамотность помогает людям:*

- понять роль математики в мире,

- высказывать хорошо обоснованные суждения и принимать решения, которые необходимы конструктивному, активному и размышляющему гражданину.

Целенаправленная работа по формированию функциональной грамотности должна быть направлена на постепенный пошаговый перевод каждого обучающегося с одного уровня функциональной грамотности на следующий, более высокий. Существуют 6 уровней развития математической грамотности.

**Контекст задания** – это особенности и элементы окружающей обстановки, представленные в задании в рамках предлагаемой ситуации. Эти ситуации связаны с разнообразными аспектами окружающей жизни и требуют для своего решения большей или меньшей математизации. Выделены и используются 4 категории контекстов, близкие учащимся: общественная жизнь, личная жизнь, образование/профессиональная деятельность и научная деятельность.

**Математическое содержание** заданий в исследовании распределено по четырем категориям: пространство и форма, изменение и зависимости, количество, неопределённость и данные, которые охватывают основные типы проблем, возникающих при взаимодействиях с повседневными явлениями. Название каждой из этих категорий отражает обобщающую идею, которая в общем виде характеризует специфику содержания заданий, относящихся к этой области. В совокупности эти обобщающие идеи охватывают круг математических тем, которые, с одной стороны, изучаются в школьном курсе математики, с другой стороны, необходимы 15-летним учащимся в качестве основы для жизни и для дальнейшего расширения их математического кругозора:

– изменение и зависимости – задания, связанные с математическим описанием зависимости между переменными в различных процессах, т.е. с алгебраическим материалом;

– пространство и форма – задания, относящиеся к пространственным и плоским геометрическим формам и отношениям, т.е. к геометрическому материалу;

– количество – задания, связанные с числами и отношениями между ними, в программах по математике этот материал чаще всего относится к курсу арифметики;

– неопределённость и данные – задания охватывают вероятностные и статистические явления и зависимости, которые являются предметом изучения разделов статистики и вероятности.

В структуре математической грамотности выделяют 4 содержательные области:

«Пространство и форма (геометрия)»,

«Изменения и зависимости (алгебра)»,

«Количество (арифметика)»,

«Неопределенность и данные (теория вероятности и статистика)».

Для описания мыслительной (когнитивной) деятельности при разрешении предложенных проблем используются следующие глаголы: формулировать, применять и интерпретировать, рассуждать, которые указывают на когнитивные процессы, которые будут актуализироваться:

– формулировать ситуацию на языке математики (на этапе перевода реальной ситуации в математическую модель и постановки математической задачи);

– применять математические понятия, факты, процедуры (на этапе решения сформулированной математической задачи);

– интерпретировать, использовать и оценивать математические результаты (на этапе обработки, анализа результата и получения ответа);

– рассуждать.

Мы приходим к необходимости изменить подходы к определению содержания и формы проверочных заданий по сравнению с работами, направленными на оценку учебных достижений учащихся. В связи с этим в качестве основы для разработки заданий приняты материалы международного исследования PISA в части оценки математической грамотности. Рассмотрим основные подходы к оценке и формированию математической грамотности.

1. Учащимся предлагаются не учебные задачи, а контекстуальные, практические проблемные ситуации, разрешаемые средствами математики – комплексные задания. Контекст, в рамках которого предложена проблема, должен быть действительно жизненным, а не надуманным.

Ситуации должны быть характерными для повседневной учебной и внеучебной жизни учащихся (например, связаны с личными, школьными или общественными проблемами).

Поставленная проблема должна быть нетривиальной, интересной и актуальной для учащихся того возраста, на который она рассчитана.

2. Для выполнения комплексного задания требуется целостное, а не фрагментарное, применение математики. Это означает, что требуется осуществить весь процесс работы над проблемой: от понимания, включая формулирование проблемы на языке математики, через поиск и осуществление её решения, до сообщения и оценки результата, а не только часть этого процесса (например, решить уравнение или упростить алгебраическое выражение).

3. Мыслительная деятельность, осуществляемая при выполнении комплексного задания, описывается в соответствии с концепцией PISA-2022.

4. Для разрешения предложенной проблемной ситуации требуются знания и умения из разных разделов курса математики основной школы, соответствующие темам, выделенным в PISA, и планируемым результатам в объёме ФГОС ООО и Примерных основных образовательных программ.

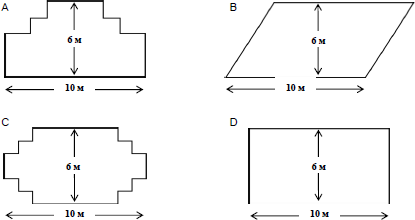
5. Комплексное задание может включать вопросы/задания в широком диапазоне сложности: от низкого уровня овладения математической грамотностью, который проявляется в способности применить математические умения только в ситуациях, близких к изученным в рамках курса математики, до высокого уровня, обеспечивающего способность справляться со сложными незнакомыми проблемными ситуациями, включая самостоятельное моделирование и исследование ситуации.

*Развитие компетенции «Пространство и форма (геометрия)»*

Поскольку понятие области «Пространство и форма (геометрия)» выходит за рамки владения традиционными геометрическими умениями, а также включает пространственную визуализацию, навыки измерения и элементы алгебры, необходимо включать в учебный процесс освоение понятия перспективы, деятельность по созданию и чтению карт, преобразованию и воссозданию фигур.

Приведем несколько примеров заданий PISA, направленных на выявление умений обучающихся в содержательной области «Пространство и форма (геометрия)».

Пример 1. Садовник

У садовника имеется 32 м провода, которым он хочет обозначить на земле границу клумбы. Форму клумбы ему надо выбрать из следующих вариантов.

Вопрос 1: Отметьте слово «Да» или «Нет» около каждой формы клумбы в зависимости от того, хватит или не хватит садовнику 32 м провода, чтобы обозначить ее границу.

|  |  |
| --- | --- |
| Форма клумбы | Хватит ли 32 м провода, чтобы обозначить границу клумбы? |
| Форма А | Да / Нет |
| Форма В | Да / Нет |
| Форма С | Да / Нет |
| Форма D | Да / Нет |

Правильный ответ: Да, Нет, Да, Да

*Развитие компетентности «Изменения и зависимости (алгебра)»*

Для достижения грамотности в содержательной области «Изменения и зависимости (алгебра)» учащиеся должны владеть традиционными понятиями алгебры - функция, выражение, уравнение и неравенство, способность интерпретировать таблицы и графики.

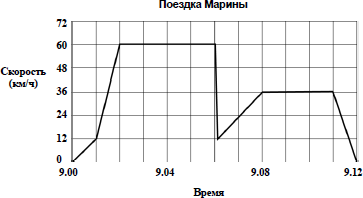
Приведем несколько примеров заданий PISA, направленных на формирование грамотности в рамках изменений и зависимостей.

Пример 1. Поездка на машине

Марина отправилась покататься на своей машине. Во время поездки дорогу перед машиной перебежала кошка.

Марина резко нажала на тормоз и сумела объехать кошку. Взволнованная этим происшествием Марина решила вернуться домой.

На приведенном ниже графике упрощенно представлена скорость машины во время поездки.



Вопрос 1: Какова наибольшая скорость машины во время поездки (в км/ч)?

Правильный ответ: 60 км/ч

Вопрос 2: Было ли расстояние, которое проехала Марина, возвращаясь домой, короче, чем расстояние, которое она проехала от дома до того места, где случилось происшествие с кошкой? Ответ объясните, используя информацию, представленную на графике.

Ответ принимается полностью: говорится, что путь домой был короче, и дано соответствующее объяснение. Объяснение связано и с тем, что средняя скорость была меньше, и с тем, что на обратный путь ушло примерно такое же время, или приведены подобные аргументы. Следует иметь в виду, что аргументы, основанные на меньшей площади под графиком скорости на обратном пути, также можно принимать полностью.

*Развитие компетентности «Количество (арифметика)»*

Для достижения грамотности в содержательной области «Количество (арифметика)» необходимо овладение навыками количественной оценки объектов, отношений, ситуаций и объектов в мире, а также понимания этих оценок с целью составления суждения.

Приведем несколько примеров заданий PISA для формирования умений в обозначенной содержательной области.

Пример 1. Какая машина?

Кристина только что получила водительские права и хочет купить себе первую машину. В приведённой ниже таблице указаны сведения о четырёх машинах, которые она нашла у местного продавца машин.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Модель: | Альфа | Бета | Гамма | Дельта |
| Год | 2003 | 2000 | 2001 | 1999 |
| Объявленная цена (зеды) | 4800 | 4450 | 4250 | 3990 |
| Пройденное расстояние  (километры) | 105 000 | 115 00 | 128 000 | 109 000 |
| Объём двигателя (литры) | 1,79 | 1,796 | 1,82 | 1,783 |

Вопрос 1: У какой машины наименьший объём двигателя?

A. Альфа

В. Бета

С. Гамма

D. Дельта.

Правильный ответ: D

Вопрос 2: Кристине придётся заплатить дополнительно 2,5% от объявленной цены машины в качестве налога. Сколько зедов составляет дополнительный налог на машину Альфа?

Правильный ответ: 120

*Развитие компетентности «Неопределенность и данные (теория вероятности и статистика)»*

Для достижения грамотности в содержательной области «Неопределенность и данные (теория вероятности и статистика)» обучающихся необходимо погружать в деятельность по распознаванию вариаций в процессах, пониманию количественной оценки этой вариации с использованием понятий «вероятность» и «ошибка в измерениях».

Приведем несколько примеров заданий PISA, направленных на формирование умений в содержательной области «Неопределенность и данные (теория вероятности и статистика)».

Пример 1. Рост

В классе 25 девочек. Их средний рост равен 130 см.

**Вопрос 1**: Объясните, как подсчитать средний рост девочек.

Правильный ответ: объяснения, в которых говорится, о том, что нужно суммировать рост всех девочек и разделить на 25.

**Вопрос 2:** Отметьте «Верное» или «Неверное» около каждого из следующих утверждений.

|  |  |
| --- | --- |
| Утверждение | Верное или Неверное |
| Если в классе есть девочка ростом 132 см, то обязательно должна быть девочка ростом 128 см. | Верное / Неверное |
| У большинства девочек рост должен быть 130 см. | Верное / Неверное |
| Если выстроить девочек по росту, начиная с самой маленькой и кончая самой высокой, то прямо посередине должна стоять девочка ростом 130 см. | Верное / Неверное |
| Половина девочек в классе должна быть выше 130 см, а другая половина должна быть ниже 130 см. | Верное / Неверное |

Правильный ответ: Неверное, Неверное, Неверное, Неверное.

**Вопрос 3:** Оказалось, что рост одной из девочек был указан неверно. Ее рост вместо 145 см должен быть 120 см. Найдите правильное значение среднего роста девочек в этом классе.

A. 126 см. В. 127 см. С. 128 см. D. 129 см. E. 144 см

Правильный ответ: D.

 Формирование у обучающихся мыслительных процессов математической грамотности (компетенций):

«Применять математические понятия, факты, процедуры»,

«Формулировать ситуацию математически»,

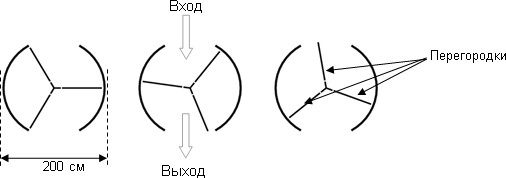
«Интерпретировать, использовать и оценивать математические

результаты»

Приведем примеры заданий PISA, направленных на выявление обозначенных компетенций, при этом не будем выделять группы заданий по разным компетенциям, поскольку в комплексных заданиях разные вопросы могут быть направлены на оценивание разных компетенций. Укажем компетенции в описании каждого вопроса.

Пример 1. Вращающаяся дверь

Вращающаяся дверь имеет три стеклянных перегородки, которые вместе с этой дверью вращаются внутри кругового пространства. Внутренний диаметр этого пространства 2 метра (200 сантиметров). Три дверные перегородки делят пространство на три равных сектора. Ниже на плане показаны дверные перегородки в трёх разных позициях, если смотреть на них сверху.



 Вопрос 1 (применять математические понятия, факты, процедуры): Чему равна в градусах величина угла между двумя дверными перегородками? Правильный ответ: 120◦.

Вопрос 2 (формулировать ситуацию математически): Два дверных проёма (пунктирные дуги на рисунке) имеют одинаковый размер. Если эти проёмы слишком широкие, то вращающиеся двери не смогут закрыть открытое пространство, и воздух сможет свободно поступать через вход и выход. Это приведет либо к потере тепла, либо к его увеличению. Этот случай показан на рисунке справа.

Какую наибольшую длину дуги в сантиметрах (см) может иметь каждый дверной проём, чтобы воздух никогда не мог свободно поступать через вход и выход?

Правильный ответ: ответ в пределах от 103 до 105, его значение зависит от точности значения π, использованного в вычислениях.

Вопрос 3 (формулировать ситуацию математически): Дверь делает 4 полных оборота за минуту. В каждом из трёх секторов двери могут поместиться максимально 2 человека. Какое наибольшее число людей может войти в здание через эту дверь за 30 минут?

А 60 В 180 С 240 В 720

Правильный ответ: 720

Обучающие задания.

Для поэтапного развития математической грамотности обучающихся важно знать, какой уровень математической грамотности у них сформирован на данный момент и вести работу, способствующую освоению следующего уровня математической грамотности.

Например, обучающиеся продемонстрировали 1 уровень математической грамотности. Этих обучающихся для перевода на следующий уровень необходимо на уроках и на внеурочных занятиях постоянно погружать в деятельность по интерпретации и распознаванию ситуаций, в которых, согласно условию, требуется сделать прямой вывод. Надо предлагать таким ученикам извлекать информацию, представленную в единственном источнике, использовать стандартные алгоритмы, формулы и процедуры, проводить прямые рассуждения и интерпретировать полученные результаты.