## МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ



# МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

по изучению темы «Постоянный электрический ток» в школьном курсе физики

#### Авторы:

- А. А. Якута, к. ф.-м. н., доцент, старший научный сотрудник лаборатории естественнонаучного образования ФГБНУ «Институт содержания и методов обучения».
- $M.\ A.\ Окин,\ к.\ т.\ н.,\ доцент,\ учитель физики ГБОУ Республики Мордовия «Республиканский лицей для одарённых детей».$
- В. В. Радайкин, к. ф.-м. н., доцент, заслуженный работник образования Республики Мордовия, учитель физики и астрономии ГБОУ Республики Мордовия «Республиканский лицей для одарённых детей».

#### Рецензенты:

- Л. А. Паршутина, к. п. н., заведующая лабораторией естественно-научного образования ФГБНУ «Институт содержания и методов обучения».
- E.~B.~Лукашева, к. ф.-м. н, доцент, почетный работник сферы образования Российской Федерации, доцент кафедры общей физики ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова».
- Я49 Постоянный электрический ток / [А. А. Якута, М. А. Окин, В. В. Радайкин]. М.: ФГБНУ «Институт содержания и методов обучения», 2024. 33 с.

ISBN 978-5-6053417-7-2

Пособие содержит учебно-методические материалы, раскрывающие тему «Постоянный электрический ток», изучаемую в 8 классе в рамках учебного предмета «Физика» (раздел «Электрические и магнитные явления»). Пособие включает необходимый теоретический материал и практические задания (задачи базового, повышенного и высокого уровня сложности, а также примеры лабораторных работ).

Издание адресовано учителям физики и методистам. Оно может быть использовано в образовательном процессе общеобразовательных учреждений при обучении физике как на базовом, так и на углублённом уровне. Учебно-методические материалы пособия окажут помощь учителям при подготовке школьников к успешной сдаче ОГЭ по физике. Также они могут быть полезными при подготовке к школьному и муниципальному этапу всероссийской олимпиады школьников по физике.

Методическое пособие разработано в рамках государственного задания  $\Phi \Gamma Б H Y$  «Институт содержания и методов обучения» на 2024 год «Обновление содержания общего образования».

УДК 372.853 ББК 74.262.23

ISBN 978-5-6053417-7-2

© ФГБНУ «Институт содержания и методов обучения», 2024 Все права защищены

# СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ	6
1.1. Электрический ток	6
1.2. Электрическая цепь	6
1.3. Работа и мощность электрического тока. Закон Джоуля-Ленца	11
1.4. Нелинейные элементы	12
2. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ	13
2.1. ЗАДАЧИ	13
2.1.1. Параметры электрических цепей	13
2.1.2. Закон Ома для участка цепи. Последовательное и параллельное соединение проводников.	14
2.1.3. Закон Ома для полной цепи	15
2.1.4. Правила Кирхгофа	17
2.1.5. Работа и мощность электрического тока. Закон Джоуля – Ленца.	19
2.1.6. Нелинейные элементы	21
2.2. ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ	23
2.2.1. Лабораторная работа «Определение удельного сопротивления проводника».	23
2.2.2. Лабораторная работа «Определение ЭДС и внутреннего сопротивления источника тока»	27
2.2.3. Лабораторная работа «Расширение предела измерений амперметра»	29

#### **ВВЕДЕНИЕ**

Учебно-методические рекомендации по изучению темы «Постоянный электрический ток» разработаны в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом основного общего образования (ФГОС ООО) и федеральной образовательной программой основного общего образования (ФОП ООО) [1, 2].

Согласно федеральной рабочей программе основного общего образования, при изучении физики как на базовом, так и на углубленном уровне предусмотрено обязательное (инвариантное) освоение обучающимися 8 класса раздела «Электрические и магнитные явления», одной из тем которого является «Постоянный электрический ток» [3, 4].

При изучении данной темы на углубленном уровне ее программное содержание расширяется по сравнению с изучением на базовом уровне за счет добавления таких элементов содержания, как «амперметр и вольтметр в цепи постоянного тока», «ЭДС в цепи постоянного тока», «закон Ома для полной цепи», «правила Кирхгофа», «расчёт простых электрических цепей», «нелинейные элементы». Такое расширение программного содержания требует разработки инструментария дополнительной методической поддержки учителей, преподающих физику в 8 классах общеобразовательных учреждений.

Пособие включает необходимый теоретический материал по теме «Постоянный электрический ток» необходимый теоретический материал и практические задания (задачи базового, повышенного и высокого уровня сложности, а также примеры лабораторных работ). Особое внимание в пособии уделено рассмотрению элементов содержания, которые лишь сравнительно недавно были включены в ФГОС ООО, а именно: применению для расчета электрических цепей правил Кирхгофа; особенностям поведения нелинейного элемента (диода) в цепях постоянного тока; рассмотрению электрических цепей, содержащих неидеальные амперметр и вольтметр.

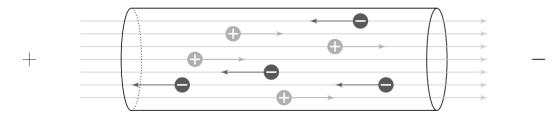
Предлагаемые методические рекомендации помогут учителям физики более эффективно организовать учебный процесс, обеспечив доступное и последовательное изложение материала по теме «Постоянный электрический ток». Рекомендации также могут быть полезны учителям и педагогам дополнительного образования при организации внеурочной деятельности обучающихся, в том числе, при подготовке к школьному и муниципальному этапу всероссийской олимпиады школьников по физике, для чего рекомендуется использовать дополнительную литературу (например, пособие [5]).

#### 1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

#### 1.1. Электрический ток. Постоянный ток

Электрическим током называется направленное, упорядоченное движение заряженных частиц.

Для существования электрического тока необходимо наличие свободных заряженных частиц (носителей электрического заряда), внешнее электрическое поле и наличие источника тока (источника сторонних сил, действующих на заряды). За направление течения тока принимается направление движения положительно заряженных частиц. Следует иметь в виду, что в металлах носителями заряда являются свободные электроны, и движутся именно они. Но при этом считается, что ток течет в направлении, противоположном направлению движения электронов.



### 1.2. Электрическая цепь

Различные элементы, входящие в состав электрических цепей, обозначаются на схемах электрических цепей при помощи специальных символов. Символы, обозначающие элементы, наиболее часто встречающиеся в условиях задач для 8 класса, приведены в таблице.

Название элемента	Обозначение элемента		
источник тока			
контакты	——Ø Ø——		
ключ			
резистор			

реостат	
гальванометр	—G—
амперметр	—(A)—
вольтметр	
лампочка	
диод	

Сила тока — скалярная величина, численно равная отношению электрического заряда, прошедшего через поперечное сечение проводника, ко времени прохождения:  $I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$ , где I — сила тока (измеряется в амперах),  $\Delta q$  — прошедший заряд (измеряется в кулонах),  $\Delta t$  —время прохождения заряда (измеряется в секундах). При условии неизменности отношения величины протекающего заряда ко времени его протекания для любых промежутков времени ток является постоянным.

Hanpsжение (электрическое) между двумя точками — скалярная физическая величина, численно равная отношению работы по перемещению заряда между данными точками к величине этого заряда:  $U = \frac{A}{q}$ , где U — напряжение (измеряется в вольтах), A — работа (измеряется в джоулях), совершаемая всеми силами (и силами электрического поля, и сторонними силами неэлектрической природы), q — переносимый заряд.

Приборы для измерения силы тока и напряжения называются, соответственно, амперметр и вольтметр.

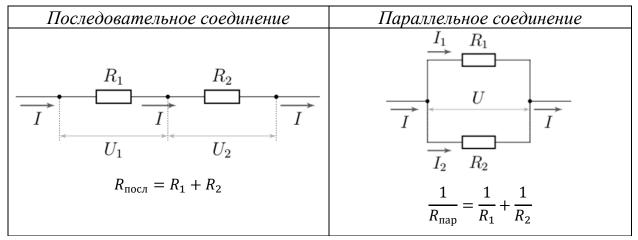
Закон Ома для участка цепи: сила тока I, протекающего через поперечное сечение проводника, прямо пропорциональна напряжению U между концами проводника:  $I = \frac{U}{R}$ , где R — электрическое сопротивление (измеряется в омах) проводника, зависящее от материала проводника (его удельного сопротивления  $\rho_{yд}$ , которое, в свою очередь, зависит от различных факторов, например, от температуры), а также от формы и размеров проводника.

В случае, когда проводник имеет цилиндрическую форму (проволока) длиной l и площадью поперечного сечения S, его сопротивление можно рассчитать по формуле:  $R = \rho_{\rm уд} \frac{l}{S}$ . Следует понимать, что закон Ома установлен экспериментально!

Необходимо отметить, что в электрической цепи все элементы обладают сопротивлением, однако у некоторых элементов (соединительных проводов, каких-либо измерительных приборов и т.п.) оно может быть малым и по этой причине не учитывается.

Если амперметр обладает пренебрежимо малым (по сравнению с другими элементами цепи) сопротивлением, то сопротивление этого прибора считают равным нулю. Такой амперметр называется идеальным. Хороший вольтметр, напротив, должен иметь очень большое сопротивление. Идеальным называется вольтметр, который обладает бесконечно большим сопротивлением.

Обычно в стандартных задачах сопротивление цепи определяется резисторами, которые могут быть соединены последовательно и (или) параллельно: при первом способе соединения через резисторы протекает ток одинаковой силы, при втором на резисторы подаётся одинаковое напряжение. Часто бывает, что в цепи присутствуют как последовательные, так и параллельные соединения резисторов — тогда соединение называется смешанным.



Основной характеристикой источника тока является электродвижущая сила (ЭДС, измеряется в вольтах) — это отношение работы, совершаемой сторонними силами по перемещению зарядов в источнике тока против сил электростатического поля, к величине этих зарядов:

$$\varepsilon = \frac{A_{\rm crop}}{q}.$$

Работа на участке цепи может совершаться сторонними силами и силами, действующими на заряды со стороны электрического поля:  $A = A_{\rm ctop} + A_{\rm эл}.$  Тогда напряжение

$$U = \frac{A_{\text{стор}} + A_{\text{эл}}}{q} = \frac{A_{\text{стор}}}{q} + \frac{A_{\text{эл}}}{q} = \varepsilon + \Delta \varphi,$$

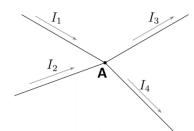
где  $\Delta \varphi$  — разность потенциалов. Для замкнутой (полной) цепи  $\Delta \varphi = 0$ , а согласно закону Ома для участка цепи  $U = I(R_{\rm внеш} + r)$ , где  $R_{\rm внеш}$  — внешнее сопротивление цепи, а r — внутреннее сопротивление источника тока. Таким образом

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{\text{внеш}} + r}.$$

Последнее соотношение называется законом Ома для полной цепи. Из него следует, что при малом сопротивлении внешней цепи ( $R_{\rm внеш} \to 0$ ) сила тока через источник с малым внутренним сопротивлением может принимать достаточно большие значения. Такие ситуации в технике называют коротким замыканием: сила тока короткого замыкания  $I_{\kappa.3.} = \frac{\varepsilon}{r}$ .

Универсальным методом, применимым для расчёта параметров любых электрических цепей являются правила Кирхгофа.

I-е правило Кирхгофа: алгебраическая сумма сил токов, сходящихся в узле (точке соединения проводников) разветвлённой цепи, равна нулю:  $I_1 + I_2 + I_3 + \ldots + I_n = 0$ . При этом силы токов, «втекающих» в узел, берутся со знаком «+», а «вытекающих» из узла — со знаком «—». Альтернативная формулировка: сумма сил токов, втекающих в узел электрической цепи, равна сумме сил токов, вытекающих из этого узла. Направления токов в участках цепи можно выбирать произвольным образом.



Например, для изображённого на рисунке узла A первое правило Кирхгофа будет иметь вид:

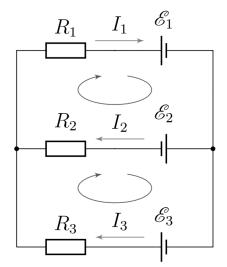
$$I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 0$$
 или  $I_1 + I_2 = I_3 + I_4$ .

2-е правило Кирхгофа: алгебраическая сумма ЭДС, действующих вдоль любого замкнутого контура разветвлённой цепи, равна алгебраической сумме напряжений на каждом из участков этого контура:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots \varepsilon_k = I_1 R_1 + I_2 R_2 + I_3 R_3 + \dots + I_n R_n$$

Перед применением второго правила Кирхгофа сначала необходимо выбрать направление обхода каждого контура (это направление можно выбрать произвольным образом). Далее при записи уравнений нужно руководствоваться следующими «правилами знаков». 1) Если обход контура

сонаправлен c действием ЭДС (источник «проходится» от «-» к «+», то при суммировании данная ЭДС  $\varepsilon_k$  считается положительной, а в случае – отрицательной. противном 2) Если направление обхода контура совпадает направлением В резисторе, тока TO соответствующее напряжение  $I_n R_n$  считается противном положительным, a В случае отрицательным.



Показанная на рисунке цепь состоит из двух замкнутых контуров – верхнего и нижнего. Второе правило Кирхгофа, записанное для каждого из этих контуров, при выбранных направлениях обхода будет иметь вид:

$$-\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = I_1 R_1 + I_2 R_2; \quad \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = -I_2 R_2 + I_3 R_3.$$

Следует понимать, что при решении системы уравнений, составленной с помощью применения правил Кирхгофа, значения искомых сил токов могут получиться отрицательными. Это будет означать, что на самом деле данный ток течет в противоположном направлении. Именно поэтому перед применением правил Кирхгофа направления токов во всех участках цепи можно выбрать произвольным образом — верные значения сил токов (с учетом знаков) автоматически получатся при решении системы уравнений.

#### 1.3. Работа и мощность электрического тока. Закон Джоуля – Ленца

**Закон** Джоуля – Ленца: количество теплоты, выделившееся при протекании электрического тока по проводнику, прямо пропорционально квадрату силы тока, сопротивлению проводника и времени протекания тока:  $Q = I^2 Rt$ . Данный закон установлен экспериментально.

Из закона сохранения энергии, примененного для соответствующего участка электрической цепи, следует, что выделившееся в проводнике количество теплоты равно работе, совершенной электрическим током. Тогда

$$A = I^2 R t = \frac{U^2}{R} t = U I t.$$

Последнее соотношение позволяет получить универсальное соотношение для скорости совершения работы электрическим током или для мощности тока:  $N=\frac{A}{t}=UI$ . В случае выполнения закона Ома для участка цепи формула для мощности принимает вид:  $N=I^2R=\frac{U^2}{R}$ .

#### 1.4. Нелинейные элементы

Вольтамперной характеристикой (ВАХ) элемента цепи называют зависимость силы тока, текущего через этот элемент, от приложенного к нему напряжения (или от разности потенциалов между контактами элемента цепи). Характер зависимости I(U) определяется лишь свойствами самого элемента, а не внешней цепью. В условиях задач ВАХ может быть задана как графически,

так и аналитически (формулой).

Для идеального резистора ВАХ является прямой пропорциональностью (линия 1 на рисунке), что является следствием закона Ома для участка цепи. Однако для реальных резисторов

(например, для лампы накаливания) ВАХ заметно отклоняется от прямо пропорциональной зависимости (линия 2 на рисунке), что обусловлено зависимостью электрического сопротивления нити накала лампы от температуры. График зависимости I(U) для таких элементов отличается от прямой линии, откуда и происходит название «нелинейные элементы».

Нелинейным элементом, часто используемым на практике и встречающимся в условиях задач, и потому представляющим большой интерес, является диод. Модельная ВАХ диода выглядит так, как показано на рисунке. Вид

этой зависимости говорит о том, что ток через данный идеализированный диод может протекать только в одном направлении. Когда такой диод «открыт», напряжение на нем равно нулю (а значит, и его сопротивление также равно нулю). В случае, если диод «закрыт», то его сопротивление бесконечно велико. Диод с такой ВАХ принято называть «идеальным».

#### 2. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

#### 2.1. ЗАДАЧИ

## 2.1.1. Параметры электрических цепей

**1.** Через нить лампочки карманного фонаря за время  $t_1=2$  мин проходит заряд  $q_1=20$  Кл. Определите силу тока и время, за которое через нить лампочки пройдет заряд  $q_2=60$  Кл.

*Ответ:* 
$$I = \frac{q_1}{t_1} \approx 0.17 A$$
,  $t_2 = \frac{q_2}{q_1} t_1 = 6$  мин .

**2.** Сила тока в проводнике I = 10 А. Найдите массу электронов, проходящих через поперечное сечение проводника за время t = 1 год.

*Omвет:* 
$$m = \frac{m_e It}{e} \approx 0,79 \,\mathrm{MF}$$
.

**3.** Железный провод, соединяющий острие громоотвода с землей, имеет поперечное сечение площадью  $S=1~{\rm cm^2}.$  Во время разряда молнии по этому проводу может проходить ток силой  $I=10^{\circ}{\rm A}.$  Определите плотность тока в проводе, то есть силу тока в расчете на единицу площади поперечного сечения.

Omsem: 
$$j = \frac{I}{S} = 10^9 \frac{A}{M^2}$$
.

**4.** Медный и алюминиевый проводники имеют одинаковые массы и сопротивления. Какой проводник длиннее и во сколько раз? Удельное сопротивление меди  $1,71\cdot10^{-8}$  Ом·м, удельное сопротивление алюминия  $2,8\cdot10^{-8}$  Ом·м, плотность меди 8,9 г/см<sup>3</sup>, плотность алюминия 2,7 г/см<sup>3</sup>.

Решение.

$$\begin{split} l_1 S_1 \rho_1 &= l_2 S_2 \rho_2 \Rightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{S_2}{S_1} \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad \frac{l_1}{S_1} \rho_{y \partial 1} = \frac{l_2}{S_2} \rho_{y \partial 2} \Rightarrow \frac{S_2}{S_1} = \frac{l_2}{l_1} \frac{\rho_{y \partial 2}}{\rho_{y \partial 1}}, \\ \frac{l_2}{l_1} &= \sqrt{\frac{\rho_{y \partial 1}}{\rho_{y \partial 2}} \frac{\rho_1}{\rho_2}} = \sqrt{\frac{1,71}{2,8} \frac{8.9}{2,7}} \approx 1,42 \end{split}$$

Таким образом, алюминиевый проводник длиннее в 1,42 раз.

**5**. Медный проводник имеет длину 500 м и площадь поперечного сечения 0,5 мм<sup>2</sup>. Чему равна сила тока в проводнике при напряжении между его концами 12 В? Удельное сопротивление меди 1,71·10<sup>-8</sup> Ом·м.

*Ombem:* 
$$I = \frac{U}{R} = \frac{U \cdot S}{l \cdot \rho} = \frac{12 \cdot 0.5 \cdot 10^{-6}}{500 \cdot 2.8 \cdot 10^{-8}} \approx 0.7 \,\text{A}.$$

# 2.1.2. Закон Ома для участка цепи. Последовательное и параллельное соединение проводников

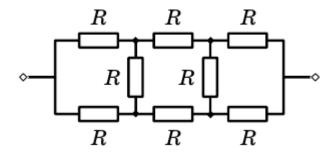
**1.** Два проводника, соединенные последовательно, имеют сопротивление в n = 6,25 раза большее, чем при их параллельном соединении. Определите, во сколько раз сопротивление одного проводника больше сопротивления другого.

Решение.

Общее сопротивление двух проводников, соединенных последовательно, равно  $R_{nocn}=R_1+R_2$ , где  $R_1$ ,  $R_2$  — сопротивления каждого из проводников. При параллельном соединении проводников  $R_{nap}=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$ . По условию задачи:  $R_{nocn}=nR_{nap}$ . Решив систему этих уравнений, получим возможные ответы:

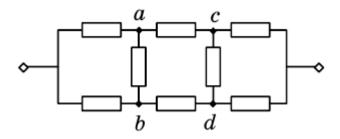
$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{n-2+\sqrt{(n-2)^2-4}}{2} = 4 \quad \text{if} \quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{n-2-\sqrt{(n-2)^2-4}}{2} = 0,25.$$

**2.** Найдите общее сопротивление цепи, схема которой показана на рисунке, если R=1 Ом.

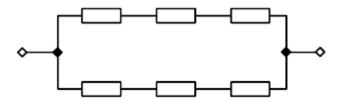


Решение.

Так как схема симметрична, то потенциалы точек a и b, а также точек c и d, попарно равны  $\varphi_a = \varphi_b$  ,  $\varphi_c = \varphi_d$  (см. рисунок).



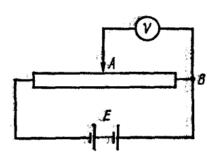
Следовательно, схему можно преобразовать к виду, показанному на рисунке ниже.



Сопротивления обеих ветвей такой цепи одинаковы:  $R_1=R_2=3R$ , а общее сопротивление цепи:  $R_0=\frac{R_1\cdot R_2}{R_1+R_2}=\frac{3}{2}\,R=1,5\,\mathrm{Om}\,.$ 

#### 2.1.3. Закон Ома для полной цепи

1. Потенциометр с полным сопротивлением R = 100 Ом подключен к источнику тока с ЭДС  $\varepsilon = 150$  В и внутренним сопротивлением r = 50 Ом (см. рис.). Определить показание вольтметра с сопротивлением  $R_{\rm B} = 500$  Ом, соединённого



проводником с одной из клемм потенциометра и подвижным контактом с

серединой обмотки потенциометра. Чему равно напряжение между теми же точками потенциометра при отключенном вольтметре?

Решение.

Показания  $U_1$  вольтметра, подключенного к точкам A и B (см. рис.), определяются по формуле:

$$U_1 = I_1 R_1, \tag{1}$$

где  $I_1$  — сила тока в неразветвленной части цепи,  $R_1$  — сопротивление параллельно соединенных вольтметра и половины потенциометра.

Силу тока  $I_1$  найдём по закону Ома для всей цепи:

$$I_1 = \varepsilon/(R+r),\tag{2}$$

где R — сопротивление внешней цепи.

Внешнее сопротивление R есть сумма двух сопротивлений:

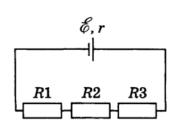
$$R = R/2 + R_1. \tag{3}$$

Сопротивление  $R_1$  параллельного соединения может быть найдено по формуле  $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R/2}$ , откуда:  $R_1 = RR_B/(R + 2R_B)$ . Подставив в эту формулу числовые значения величин и произведя вычисления, найдем:  $R_1 = 45,5$  Ом.

Подставив в выражение (2) правую часть равенства (3), определим силу тока:  $I = \frac{\varepsilon}{R/2 + R_1 + r} = 1,03$  А. Если подставить значения  $I_1$  и  $R_1$  в формулу (1), то найдём показание вольтметра:  $U_1 = 46,9$  В.

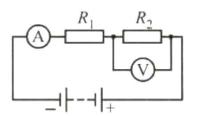
Разность потенциалов между точками A и B при отключенном вольтметре равна произведению силы тока  $I_2$  на половину сопротивления потенциометра, т. е.  $U_2=I_2(R/2)$ , или  $U_2=\frac{\varepsilon}{R+r}\frac{R}{2}$ . Подставив сюда значения величин  $\varepsilon$ , r и R получим:  $U_2=50~\mathrm{B}$ .

**2**. К источнику тока, ЭДС которого равна 6 В, подключены резисторы, сопротивления которых  $R_1 = 1$  Ом,  $R_2 = R_3 = 2$  Ом. Сила тока в цепи равна 1 А. Определите внутреннее сопротивление источника.



Omsem: 
$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2 + R_3 + r} \Rightarrow r = \frac{\mathcal{E}}{I} - (R_1 + R_2 + R_3) = 1 \text{ Om}.$$

3. Каковы показания идеальных амперметра и вольтметра в цепи, схема которой изображена на рисунке, если ЭДС источника 6 В, его внутреннее сопротивление 0,2 Ом,  $R_1 = 1,8$  Ом,  $R_2 = 10$  Ом?



*Omeem:* 
$$I = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2 + r} = \frac{6}{12} = 0.5 \text{ A}, V = IR_2 = 5 \text{ B}.$$

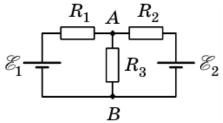
**4.** К аккумулятору с внутренним сопротивлением 0,01 Ом подключён резистор с сопротивлением 10 Ом. Вольтметр даёт одинаковое показание при последовательном и параллельном подключении его к резистору. Найти сопротивление вольтметра.

Решение.

$$\begin{split} \varepsilon &= I_1 \Big( R + R_V + r \Big) = I_2 \Bigg( \frac{RR_V}{R + R_V} + r \Bigg), \qquad I_1 R_V = I_2 \frac{RR_V}{R + R_V} \Longrightarrow I_1 = I_2 \frac{R}{R + R_V}, \\ I_2 \frac{R}{R + R_V} \Big( R + R_V + r \Big) &= I_2 \Bigg( \frac{RR_V}{R + R_V} + r \Bigg) \quad \Longrightarrow \quad R_V = \frac{R^2}{r} = 10 \text{ kOm} \end{split}$$

## 2.1.4. Правила Кирхгофа

1. Определите силу тока, текущего через резистор  $R_2$  (см. рис.), и напряжение между точками A и B, если ЭДС источников тока



 $\mathscr{E}_1 = 4 \ \mathrm{B}$  и  $\mathscr{E}_2 = 3 \ \mathrm{B}$ , а сопротивления резисторов  $R_1 = 2 \ \mathrm{Om}$ ,  $R_2 = 1 \ \mathrm{Om}$ ,  $R_3 = 6 \ \mathrm{Om}$ . Внутренними сопротивлениями источников пренебречь.

Решение.

Выберем направления токов  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  в участках цепи так, как показано на рисунке ниже, и условимся обходить контуры по часовой стрелке.

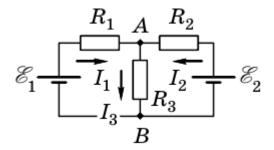


Схема содержит два узла A и B. По первому закону Кирхгофа для узла A:

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0. (1)$$

Второй закон Кирхгофа для двух контуров  $A-R_3-B-\mathscr{E}_1-R_1-A$  и  $A-R_2-\mathscr{E}_2-B-R_3-A$ :

$$I_1R_1 + I_3R_3 = \mathscr{E}_1, (2)$$

$$-I_1R_1 - I_3R_3 = -\mathcal{E}_2. (3)$$

Из уравнений (2), (3) находим:

$$I_3 = (\mathscr{E}_2 - I_2 R_2)/R_3, \qquad I_1 = (\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2 + I_2 R_2)/R_1.$$
 (4)

Подставив выражения для сил токов  $I_1$  и  $I_3$  из соотношений (4) в (1), получим:

$$(\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2 + I_2R_2)/R_1 + I_2 - (\mathscr{E}_2 - I_2R_2)/R_3 = 0,$$

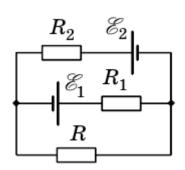
откуда находим:

$$I_2 = ((\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1)R_3 + \mathcal{E}_2R_1)/(R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3) = 0.$$

Напряжение между точками A и B найдем из закона Ома для участка цепи  $A-R_3-B$ :

$$U_{A-B} = I_3 R_3 = \mathcal{E}_2 = 3 \text{ B}.$$

**2.** Найдите силу тока через резистор R (см. рис.) и его направление, если  $\mathscr{E}_1 = 1,5$  В,  $\mathscr{E}_2 = 3,7$  В,  $R_1 = 10$  Ом,  $R_2 = 20$  Ом,  $R_3 = 5$  Ом. Внутренние сопротивления источников тока не учитывать.



Omsem: ток течет слева направо, его сила равна  $I_2=(\mathscr{E}_2R_2-\mathscr{E}_1R_1)/(R_1R_2+R(R_1+R_2))=0,02$  А.

**3.** Найдите силу тока через резистор R (см. рис.). Значения R,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $\mathscr{E}_1$ ,  $\mathscr{E}_2$  известны. Внутренние сопротивления источников тока не учитывать.

$$\mathcal{E}_1, r_1$$
 $\mathcal{E}_2, r_2$ 
 $R$ 

*Omeem:*  $I = (\mathcal{E}_2 R_2 + (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) R_3) / (R_2 R_3 + R(R_2 + R_3)).$ 

# 2.1.5. Работа и мощность электрического тока. Закон Джоуля – Ленца

**1.** Электроплитка содержит три спирали с сопротивлениями R = 120 Ом каждая, соединённые параллельно друг с другом. Плитку включают в сеть последовательно с резистором сопротивлением r = 50 Ом. Как изменится время, необходимое для нагревания на этой плитке до кипения чайника с водой некоторой массы, при перегорании одной из спиралей?

Решение.

При первоначальном соединении спиралей плитки общее сопротивление:  $R_1 = \frac{R}{3} + r$ . Сила тока в цепи:

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{U}{\frac{R}{3} + r} .$$

При этом за время  $\Delta t_1$  выделится количество теплоты:

$$Q_{1} = I_{1}^{2} \frac{R}{3} \Delta t_{1} = \frac{U^{2}}{\left(\frac{R}{3} + r\right)^{2}} \frac{R}{3} \Delta t_{1} = \frac{3U^{2} R \Delta t_{1}}{\left(R + 3r\right)^{2}}.$$

Если одна из спиралей перегорит, то общее сопротивление:  $R_2 = \frac{R}{2} + r$ , а сила тока в цепи:

$$I_2 = \frac{U}{R_2} = \frac{U}{\frac{R}{2} + r} .$$

Тогда за время  $\Delta t_2$  выделится количество теплоты:

$$Q_{2} = I_{2}^{2} \frac{R}{2} \Delta t_{2} = \frac{U^{2}}{\left(\frac{R}{2} + r\right)^{2}} \frac{R}{2} \Delta t_{2} = \frac{2U^{2} R \Delta t_{2}}{\left(R + 2r\right)^{2}}.$$

Поскольку  $Q_1 = Q_2$  , то:  $\frac{3U^2R\Delta t_1}{\left(R+3r\right)^2} = \frac{2U^2R\Delta t_2}{\left(R+2r\right)^2}$  . Отсюда находим:

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{2(R+3r)^2}{3(R+2r)^2} = \frac{243}{242}.$$

Таким образом, время уменьшится в  $\frac{243}{242}$  раза, то есть практически не изменится.

**2.** Какое количество теплоты выделяет нить электрической лампы в течение времени t=1 ч, если сила тока в лампе I=0.5 A, а напряжение U=220 B?

Om sem: Q = UIt = 396 кДж.

**3.** Проволочный предохранитель перегорает, если напряжение на нем равно  $U_0 = 10 \text{ B}$ . При каком напряжении перегорит предохранитель, изготовленный из того же материала, если его длину увеличить в n = 2 раза,

полагая, что всё выделившееся количество теплоты идёт на нагревание и плавление проволоки?

Ответ: 
$$U = U_0 \sqrt{n} \approx 14,1 \,\mathrm{B}$$
.

**4.** Электрочайник со спиралью нагревательного элемента сопротивлением 30 Ом включен в сеть напряжением 220 В. а) Какое количество теплоты выделится в нагревательном элементе за 4 мин? б) Определите КПД электрочайника, если в нем можно вскипятить за это же время 1 кг воды, начальная температура которой 20 °C. Удельная теплоёмкость воды 4,2 кДж/(кг.°C).

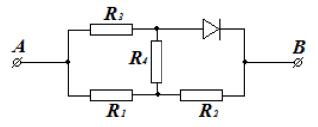
Ответ: a) 
$$Q = \frac{U^2}{R} \tau = 387,2$$
 кДж; б)  $\eta = \frac{cm\Delta t}{U^2 \tau} = \frac{336}{387,2} \cdot 100\% \approx 87\%$ .

**5.** Какой длины надо взять нихромовый проводник диаметром 0,5 мм, чтобы изготовить нагревательный элемент электрического камина, работающего при напряжении 120 В и выделяющего количество теплоты 1 МДж в час? Удельное сопротивление нихрома  $11\cdot10^{-7}$  Ом·м.

Ответ: 
$$l = \frac{U^2 \tau S}{\rho Q} \approx 9,25 \text{ м}.$$

#### 2.1.6. Нелинейные элементы

1. Определите сопротивление электрической цепи, схема которой A показана на рисунке, при двух направлениях тока: когда ток течёт от A



к B (сопротивление  $R_{AB}$ ) и когда ток течёт от B к A (сопротивление  $R_{ba}$ ). Сопротивления резисторов  $R_1 = R_3 = 30$  Ом,  $R_2 = R_4 = 60$  Ом. Диод в цепи идеальный.

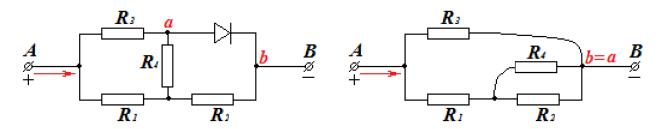
Решение.

Очевидно, что когда ток течёт от B к A, диод оказывается запертым, он не пропускает ток. Следовательно, диод

можно «выбросить» из схемы. В этом случае резисторы  $R_3$  и  $R_4$  соединены последовательно. Резистор  $R_1$  включен параллельно ветви с  $R_3$  и  $R_4$ . Резистор  $R_2$  подключен последовательно к участку с резисторами  $R_1$ ,  $R_3$  и  $R_4$ . Поэтому

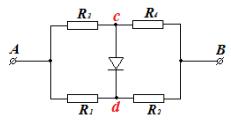
$$R_{BA} = R_2 + \frac{R_1(R_3 + R_4)}{R_1 + R_3 + R_4} = 82,5 \text{ Om}.$$

Когда ток течёт от A к B, диод открыт. Сопротивление диода равно нулю, следовательно, точки a и b имеют одинаковые потенциалы, и их можно соединить. Получим эквивалентную схему (см. рис.).



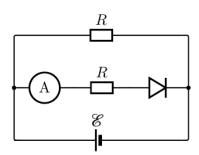
$$R_{24} = \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} = 30 \text{ Om}, \qquad R_{124} = R_1 + R_{24} = 60 \text{ Om}, \qquad R_{AB} = \frac{R_{124}}{R_{124} + R_3} = 20 \text{ Om}.$$

**2.** Найдите распределение токов в цепи (см. рис.), если сопротивления резисторов равны  $R_1 = 1$  кОм,  $R_2 = 3$  кОм,  $R_3 = 2$  кОм,  $R_4 = 4$  Ом. Диод идеальный. Общее напряжение  $U_{AB} = 100$  В.



Peшeнue. Если диод закрыт, то токи равны:  $I_1=I_2=25~\rm mA$  ,  $I_3=I_4\approx 16,7~\rm mA$  . Если диод открыт, то токи равны:  $I_1=28~\rm mA$  ,  $I_2=24~\rm mA$  .  $I_3=14~\rm mA$  ,  $I_4=18~\rm mA$  .

**3.** Диод в цепи, показанной на рисунке, открывается при напряжении  $U_0 = 0.5$  В. Что показывает идеальный амперметр, если  $\mathscr{E} = 1.5$  В, R = 50 Ом? Определите ток через батарейку. Внутренним сопротивлением источника пренебречь.



*Ответ:*  $I_A = 20$  мА,  $I_{\mathscr{E}} = 50$  мА.

#### 2.2. ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ

В процессе изучения раздела «Постоянный электрический ток» рекомендуется провести лабораторные работы, цель которых заключается в более глубоком понимании обсуждаемых явлений и процессов, а также в проверке рассмотренного теоретического материала.

Помимо основных, направленных на освоение базового материала и часто встречаемых в методических материалах и лабораторных комплексах, с целью расширения охвата тем раздела полезно выполнить лабораторные работы с более глубоким изучением теории, например, рассмотреть условия работы измерительных приборов – амперметра и вольтметра.

#### 2.2.1. Лабораторная работа

### «Определение удельного сопротивления проводника»

*Цель работы*: проверка законов постоянного тока, приобретение навыков измерения «электрических» физических величин, усвоение понятий, используемых при описании электрических явлений, измерение удельного сопротивления нихромовой проволоки.

*Оборудование и материалы*: реохорд, вольтметр, амперметр, источник питания, микрометр.

Теоретическое введение.

**Сила тока.** Током называется упорядоченное движение частиц. Так, например, молекулы воды движутся вполне упорядоченно по водопроводным трубам. Если частицы заряжены, мы имеем дело с электрическим током. Для существования электрического тока необходимы и достаточны два условия:

- а) наличие свободных зарядов;
- б) наличие электрического поля, заставляющего эти заряды упорядоченно двигаться.

Сила тока определяется как количество заряда, протекающего через некоторое сечение за единицу времени:

$$I = \frac{q}{\Lambda t}. (1)$$

Рассмотрим примеры определения силы тока.

Пример 1. Пусть по проводу сечения S упорядоченно слева направо движутся электроны (рис. 1а). Если за время  $\Delta t$  сечение S пересекут электронов, очевидно сила тока  $I = \frac{N|q_e|}{\Delta t}$ .

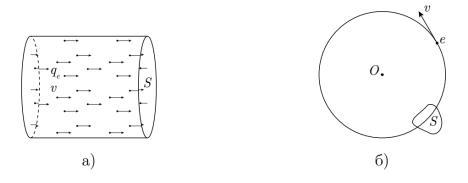


Рис. 1

Пример 2. Рассмотрим электрон на орбите атома водорода (рис. 16). Произвольное сечение S за время  $\Delta t$  электрон пересечет  $\nu \cdot \Delta t$  раз. Тогда заряд, перенесенный за это время:  $q = \nu \cdot \Delta t \cdot |q_e|$ , а сила тока

$$I = \frac{q}{\Delta t} = \frac{\nu \cdot \Delta t \cdot |q_e|}{\Delta t} = \nu \cdot |q_e|,$$

т.е. электрон на орбите создает «ниточку» тока. Это очень важный факт, лежащий в основе классической теории магнетизма вещества.

Заряд электрона в примерах берется по модулю, т.к. по определению ток это — упорядоченное движение положительных зарядов.

**Природа электрического сопротивления.** Известно, что ток в металлическом проводнике создают упорядоченно движущиеся электроны, утратившие свою связь с атомами, т.е. свободные. Атомы, потерявшие электроны, становятся положительно заряженными ионами. Они хаотично колеблются вокруг положений устойчивого равновесия в узлах кристаллической решетки.

«Столкновения» электронов с ионами при классическом объяснении становятся причиной сопротивления электрическому току.

Чем длиннее проводник, тем столкновений больше, тем больше сопротивление. Чем больше сечение проводника, тем меньше столкновений при прочих равных условиях. Чем сильнее заряжены ионы, тем сильнее они притягивают движущиеся электроны, тем вероятнее столкновения — тем больше сопротивление, т.е. сопротивление зависит также от материала проводника.

Всё это учитывает эмпирическая формула для расчета сопротивления однородного проводника длиной l и сечением S, сделанного из материала с удельным сопротивлением  $\rho_{\text{уд}}$ :

$$R = \rho_{yA} \frac{l}{s}, \tag{2}$$

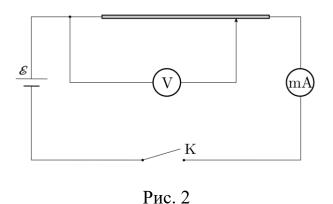
из которой очевидно, что физический смысл удельного сопротивления в том, что оно численно равно сопротивлению проводника площадью поперечного сечения  $1 \text{ м}^2$  и длиной 1 м.

В настоящей работе измеряется удельное сопротивление нихромовой проволоки небольшого диаметра d. Так как из закона Ома  $R=\frac{U}{I}$ , приравнивая это выражение к (2) и учитывая, что  $S=\pi d^2/4$ , получим окончательную расчётную формулу

$$\rho_{\rm yg} = \frac{\pi d^2 U}{4U}.\tag{3}$$

Ход работы.

- 1. Измерьте микрометром диаметр нихромовой проволоки. Проведите пять измерений на различных её участках. Вычислите среднее значение диаметра.
- 2. Соберите электрическую цепь для проведения эксперимента (рис. 2). Проволока с подвижным контактом, положение которого определяет деление проволоки на два участка (два сопротивления), называется реохордом.



3. Для пяти различных значений длин l проволоки, устанавливаемых смещением подвижного контакта реохорда, измерьте силу тока l и напряжение U. Результаты занесите в таблицу. Напряжение источника не должно превышать 1,5 В. В противном случае произойдёт значительный нагрев проволоки и сопротивление её будет изменяться.

$N_{\overline{0}}$	<i>l</i> , м	U, B	I, A	$ ho_{ m yg}$ , Ом $\cdot$ м	$\langle  ho_{ m y_{ m J}}  angle$ , Ом $\cdot$ м
1					
•••					

- 1) Для каждой длины проволоки по формуле (3) рассчитайте удельное сопротивление, затем вычислите среднее значение удельного сопротивления.
  - 2) Сделайте выводы.
  - 3) Ответьте на контрольные вопросы:
    - 3.1. Что такое электрическое напряжение?
    - 3.2. Из-за чего возникает сопротивление электрическому току?
    - 3.3. Какой физический смысл удельного сопротивления?
- 4. Почему вместо нихромовой проволоки в данной работе нельзя взять медную?
  - 5. Почему напряжение источника не может быть достаточно большим?

### 2.2.2. Лабораторная работа

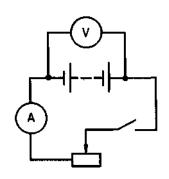
## «Определение ЭДС и внутреннего сопротивления источника тока»

*Цель работы*: измерить ЭДС и внутреннее сопротивление источника тока.

*Оборудование и материалы*: амперметр, вольтметр, ключ, провода, реостат, источник тока.

Теоретическое введение.

Схема электрической цепи, которую используют в этой лабораторной работе, показана на рисунке. В качестве источника тока в схеме используется аккумулятор или батарейка от карманного фонаря.



При разомкнутом ключе ЭДС источника тока равна напряжению на внешней цепи. В эксперименте

источник тока замкнут на вольтметр, сопротивление которого должно быть намного больше внутреннего сопротивления r источника тока. Обычно

сопротивление источника тока мало, поэтому для измерения напряжения можно использовать школьный вольтметр со шкалой  $0-6\,\mathrm{B}$  и сопротивлением  $R_{\mathrm{B}}=900\,\mathrm{Om}$  (см. надпись под шкалой прибора). В этом случае действительно  $R_{\mathrm{B}}>> r$ . При этом отличие  $\varepsilon$  от U не превышает десятых долей процента, поэтому погрешность измерения ЭДС равна погрешности измерения напряжения.

Внутреннее сопротивление источника тока можно измерить косвенно, зафиксировав показания амперметра и вольтметра при замкнутом ключе. Действительно, из закона Ома для замкнутой цепи получаем  $\varepsilon = U + Ir$ , где U = IR — напряжение на внешней цепи. Поэтому  $r_{\rm u} = \frac{\varepsilon - U}{I}$ . Для измерения силы тока в цепи можно использовать школьный амперметр со шкалой 0-2 А.

#### Ход работы

1. Подготовьте бланк отчета со схемой электрической цепи и таблицей (см. таблицу) для записи результатов измерений и вычислений.

№ опыта	ε, Β	<i>U</i> , B	I, A	<i>r</i> <sub>и</sub> , Ом
1				
••••				

- 2. Соберите электрическую цепь (рис. 1). Проверьте надежность электрических контактов, правильность подключения амперметра и вольтметра.
  - 3. Проверьте работу цепи при разомкнутом и замкнутом ключе.

Проведение эксперимента, обработка результатов.

- 1. Измерьте ЭДС источника тока.
- 2. Снимите показания амперметра и вольтметра при замкнутом ключе и вычислите  $r_{\rm u}$ .
- 3. Запишите результаты измерений ЭДС и внутреннего сопротивления источника тока.

4. Повторите измерения внутреннего сопротивления источника тока при различных положениях ползунка реостата.

Контрольные вопросы.

- 1. Почему показания вольтметра при разомкнутом и замкнутом ключе различны?
  - 2. Как можно повысить точность измерения ЭДС источника тока?
- 3. Можете ли вы предложить другие способы измерения ЭДС и внутреннего сопротивления источника тока?

#### 2.2.3. Лабораторная работа

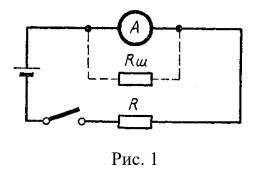
#### «Расширение предела измерений амперметра»

Цель работы: изменить пределы измерений амперметра.

Оборудование и материалы: миллиамперметр лабораторный с пределом измерения 5 мА; амперметр лабораторный с пределом измерения 2 А; омметр; выпрямитель ВС–6 или другой источник постоянного тока; реостат сопротивлением 100 Ом; реостат лабораторный сопротивлением 6 Ом; микрометр МК–25; линейка измерительная; кусачки; проволока медная эмалированная диаметром 2 мм и длинной 20 – 30 см; ключ электрический; соединительные провода.

Теоретическое введение.

Силу электрического тока в цепи резистора сопротивлением R измеряют с помощью амперметра (миллиамперметра, микроамперметра), который включают в цепь последовательно с этим



сопротивлением (рис. 1). Сопротивление амперметра должно быть во много раз меньше сопротивления цепи. Для измерения токов, больших того, на

который рассчитан прибор, т.е. для расширения его пределов измерения, к амперметру подключают шунт  $R_{\rm m}$ , показанный на рисунке пунктиром. Шунт представляет собой проволочный резистор, который подсоединяют параллельно прибору. При этом подлежащий измерению ток  $I_{\rm изм}$ , текущий через резистор R, равен сумме токов, проходящих через шунт  $R_{\rm m}$  и прибор:  $I_{\rm изм} = I_{\rm m} + I_{\rm n}$ .

По закону Ома для участка цепи можно определить сопротивление шунта:

$$R_{\text{III}} = \frac{U}{I_{\text{III}}}.$$

Учитывая, что  $I_{\rm III}=I_{\rm ИЗM}-I_{\rm II}$  и  $U=I_{\rm II}R_{\rm II}$ , где  $R_{\rm II}$  — сопротивление прибора, получим:

$$R_{\rm III} = \frac{I_{\rm II}R_{\rm II}}{I_{\rm M3M} - I_{\rm II}}.$$

Здесь сопротивление  $R_{\Pi}$  определяется с помощью омметра,  $I_{\Pi}$  – по шкале прибора, как предельный ток, а  $I_{\rm изм}$  является заданным пределом измеряемой величины тока.

Задача в этой работе сводится к тому, чтобы, выполнив необходимые измерения и вычисления, подобрать к прибору соответствующий шунт (такой, чтобы амперметр не «зашкаливал» при протекании через резистор R большого тока силой  $I_{\text{изм}}$ ).

Ход работы.

1. Подготовьте в тетради таблицу для записи результатов измерений и вычислений.

$I_{\scriptscriptstyle \mathrm{K}},\mathrm{A}$	0,2	0,4	0,6	0,8	1
I <sub>c</sub> , A					

- 2. С помощью омметра измерьте сопротивление  $R_{\rm II}$  лабораторного миллиамперметра и по шкале этого прибора определите предельно допустимый ток  $I_{\rm II}$ .
- 3. Сделайте предположение, что данный прибор должен измерять предельный ток  $I_{\rm изм}$ , равный 1 А. Рассчитайте по выведенной выше формуле сопротивление шунта  $R_{\rm III}$ .
- 4. Используя формулу для сопротивления цилиндрического проводника  $R_{\rm m}=\rho l/S$ , где  $\rho=1.71\cdot 10^{-8}$  Ом·м удельное сопротивление меди, вычислите длину l медной проволоки, из которой будет изготавливаться шунт.
- 5. Отмерьте с помощью линейки отрезок проволоки, который превышал бы вычисленную величину l на 2-3 см, и отрежьте его кусачками. Затем зачистите концы этого отрезка проволоки от изоляции и сделайте петли под зажимы амперметра так, чтобы расстояние между

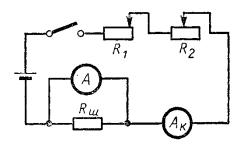


Рис. 2

петлями точно соответствовало расчетной длине шунта.

- 6. Подключите изготовленный шунт к прибору, определите цену деления у собранного таким образом амперметра, и смонтируйте электрическую цепь (ее схема показана на рис. 2) с контрольным  $(A_{\rm K})$  и собранным (A) приборами. При этом обратите внимание на то, чтобы реостат  $R_1$  сопротивлением 6 Ом был полностью включен в цепь, а реостат  $R_2$  сопротивлением 100 Ом полностью выведен из цепи.
- 7. Замкните ключ и при помощи реостата  $R_1$  установите в цепи источника силу тока 1 A по контрольному амперметру. Затем с помощью реостата  $R_2$  уменьшайте силу тока в цепи источника от максимального значения 1 A с шагом 0,2 A, и каждый раз записывайте показания обоих измерительных приборов в таблицу.

- 8. Вычислите «поправку», равную абсолютному значению средней разности в показаниях контрольного  $I_{\rm k}$  и собранного  $I_{\rm c}$  амперметров. Подумайте, что характеризует эта величина.
  - 9. Повторите опыт, выбрав другой предельный ток  $I_{\rm изм}$ , например, 2 А. Контрольные вопросы.
- 1. Почему сопротивление амперметра должно быть значительно меньше сопротивления цепи, в которой измеряют ток?
  - 2. Почему шунт включают параллельно амперметру?
  - 3. Как рассчитывают сопротивление шунта к амперметру?
- 4. Можно ли подключать шунт к амперметру с помощью соединительных проводов?

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования (приказ Министерства просвещения Российской Федерации от 31.05.2021 г. № 287, зарегистрирован Министерством юстиции Российской Федерации 05.07.2021 г. № 64101). [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://edsoo.ru (дата обращения: 05.12.2024).
- Федеральная образовательная программа основного общего образования (приказ Министерства просвещения Российской Федерации от 18.05.2023 г. № 370, зарегистрирован Министерством юстиции Российской Федерации 12.07.2023 г. № 74223). [Электронный ресурс] Режим доступа: http://edsoo.ru (дата обращения: 05.12.2024).
- 3. Федеральная рабочая программа основного общего образования: физика (базовый уровень) [Электронный ресурс] Режим доступа: http://edsoo.ru (дата обращения: 05.12.2024).
- 4. Федеральная рабочая программа основного общего образования: физика (углубленный уровень) [Электронный ресурс] Режим доступа: http://edsoo.ru (дата обращения: 05.12.2024).
- Бычков А. И., Крюков П. А. Цепи постоянного тока. М.: Изд-во МЦНМО, 2019. – 112 с.